PALACKÝ UNIVERSITY OLOMOUC

Přírodovědecká fakulta

Experimentální realizace Buquoyovy úlohy

Jan Říha, Čeněk Kodejška

Úvod

Abstrakt. *Tato práce se zabývá experimentální realizací Buquoyovy úlohy. Jedná se o systém s proměnnou hmotností, na který působí konstantní tahová síla. Naším cílem bylo sestavit funkční Buquoyův oscilátor, který by měl takové parametry, aby realizaci kmitů bylo možné provést v běžné učebně. Na základě výpočtů jsme postupně stanovili lineární hustotu vlákna, zvolili vhodný materiál vlákna, určili tahovou sílu balónku naplněného héliem a provedli videoanalýzu pohybu vlákna pomocí programu Tracker. Na závěr jsme se pokusili experimentálně naměřená data nafitovat v programu Mathematica.*

Při návrhu experimentálního provedení bylo třeba nejprve určit lineární hustotu vlákna. Jako zdroj konstantní tažné síly byl zvolen balónek naplněný héliem. Pro zjednodušení výpočtu jsme předpokládali přibližně kulový tvar balónku.

Vztah pro stacionární řešení diferenciální rovnice je podle [1] dán následujícím vztahem (1):

$$y_c = \frac{F}{\eta g}, \qquad (1)$$

kde y_c je výška konce vlákna nad zvolenou nulovou potenciální hladinou ve stavu, kdy se vlákno nepohybuje a výsledná síla je nulová, F je svisle vzhůru působící konstantní síla, η je lineární hustota vlákna a $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Protože jsme chtěli dosáhnout toho, aby bylo možné experiment demonstrovat ve třídě, jejíž maximální výška bývá cca 330 cm, při odhadu lineární hustoty jsme volili $y_c = 2$ m a maximální výšku $y_M \sim 3/2\, y_c \sim 3$ m.

Průměrná hodnota průměru balónku byla určena z jeho obvodu jako $d = (30 \pm 2)$ cm, jeho poloměr je tedy $r = (15 \pm 1)$ cm. Uvažujeme-li přibližně kulový tvar, je objem balónku $V \cong 0{,}014130\ \mathrm{m^3}$.

Na balónek naplněný héliem podle Archimédova zákona působí ve vzduchu vztlaková síla $F_{vz} = V \rho g$, která je současně tažnou silou působící na balónek. Lineární hustotu pak můžeme vyjádřit jako

$$\eta = \frac{V\rho}{y_c}, \qquad (2)$$

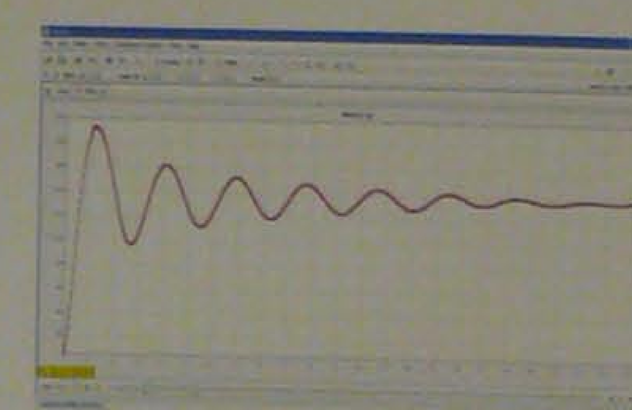
kde V je objem balónku a ρ je hustota vzduchu. Po dosazení konkrétních hodnot získáme přibližný odhad lineární hustoty vlákna $\eta = 9{,}11\ \mathrm{g\,m^{-1}}$.

Aby se hmotnost vlákna se stoupající výškou balónku zvyšovala lineárně, musí být vyrobeno optimálně z jednotlivých malých částí, které jsou vzájemně propojeny. Jako optimální se nakonec ukázal řetízek tvořený malými kuličkami používaný většinou v koupelně u umyvadla nebo vany. Protože i zde výrobci dodávají různě velké kuličky, zvolili jsme nakonec řetízek s nejmenšími kuličkami, jehož lineární hustota byla změřena jako $\eta = (10{,}4 \pm 0{,}01)\ \mathrm{g\,m^{-1}}$.

Realizace experimentu

Na obrázku 1 je Buquoyův oscilátor v rovnovážné poloze. Obrázek 2 ilustruje výsledný graf závislosti y-ové souřadnice konce vlákna (řetízku) na čase, který jsme vytvořili pomocí videoanalýzy jeho pohybu v programu Tracker.

Obrázek 1. Balónek naplněný héliem zavěšený na řetízku.



Obrázek 2. Oscilogram vzniklý videoanalýzou pohybu vlákna

Z grafu na obrázku 2 plyne, že stacionární poloha je přibližně $y_c = 1{,}38$ m, výpočtem určená hodnota podle vztahu (1) dává při tahové síle $F = 0{,}136$ N výsledek $y_c = 1{,}33$ m, který je o 4% menší než experimentálně naměřená hodnota.

Maximální výška výstupu určená experimentálně z grafu 2 je $y_M = 1{,}92$ m. Použijeme-li přibližný vztah pro výpočet y_M uvedený výše, získáme hodnotu $y_M = 2{,}07$ m, která je přibližně o 8 % větší.

Pro přesný výpočet můžeme použít vztah (3), viz [1]:

$$y_M = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y_c - y_m\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}(y_c + y_m)^2 - 4y_m^2}, \qquad (3)$$

kde y_m je počáteční výška balónku (konce vlákna) při pohybu vzhůru s nulovou počáteční rychlostí. Tento vztah můžeme za předpokladu, že $y_m = 0$ m zjednodušit na vztah (4):

$$y_M = \frac{3}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)y_c = 1{,}3624\, y_c. \qquad (4)$$

Po dosazení do vztahu (4) za $y_c = 1{,}38$ m získáváme hodnotu $y_M = 1{,}88$ m, která je pro změnu o 2 % menší než hodnota určená experimentálně. Uvážíme-li nejistotu měření přibližně 2 cm, která vznikne nastavením souřadných os a délky kalibrační tyče v programu Tracker, na jednom metru délky získáme stejnou relativní nejistotu, tj. 2 %.
Z experimentu tedy plyne v rámci 2% nejistoty měření velice dobrá shoda teorie s experimentálně naměřenými daty.

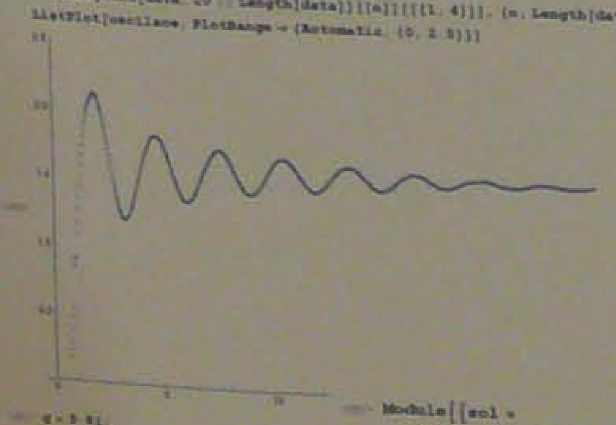
Wolfram Mathematica

Simulace pohybu balónku je založena na pohybové rovnici [1]

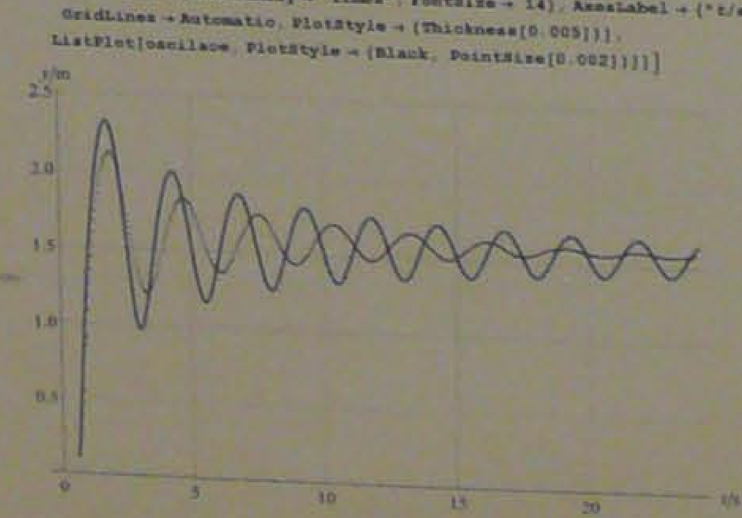
$$\ddot{y} = g\left(\frac{y_c}{y} - 1\right) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}\dot{y})\frac{\dot{y}^2}{y}$$

Tato diferenciální rovnice speciálním způsobem závisí na rychlosti.
V programu Wolfram Mathematica jsme rovnici řešili numericky při využití parametrů daných experimentem:

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
data = Flatten[Import["BuquoyOSC-data-graf.xlsx"], 1];
oscilace =
  Table[Take[data, 20 ;; Length[data]][[n]][[{1, 4}]], {n, Length[data] - 19}];
ListPlot[oscilace, PlotRange → {Automatic, {0, 2.5}}]
```



```
Module[{sol =
    NDSolve[{y''[t] == g * (1.55 / y[t] - 1) - 0.5 * (1 + Sign[y'[t]]) * y'[t]^2 / y[t],
      y[0.6] == 0.11, y'[0.6] == 0}, y, {t, 0.6, 24}]},
  Show[Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0.6, 24}, PlotRange → {Automatic, {0, 2.5}},
    BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}, AxesLabel → {"t/s", "y/m"},
    GridLines → Automatic, PlotStyle → {Thickness[0.005]}],
   ListPlot[oscilace, PlotStyle → {Black, PointSize[0.002]}]]]
```



Závěr

Všechna měření byla realizována s nulovou počáteční rychlostí. Z obrázku 2 je také vidět charakter kmitů vlákna, které koná tlumené kvaziperiodické kmity s periodou blízkou periodě T_s, pro kterou platí podle [1] rovnice (5):

$$T_s = \frac{2\pi}{g}\sqrt{\frac{F}{\eta}} \qquad (5)$$

Námi změřená taková síla balónku pomocí siloměru Vernier byla $F = (0{,}136 \pm 0{,}006)$ N a hodnota periody vypočítaná podle (5) je $T_s = 2{,}31$ s.

Experimentálně zjištěná průměrná hodnota periody podle grafu 2 je $T_{exp} = (2{,}85 \pm 0{,}02)$ s. Rozdíl mezi teoreticky vypočítanou hodnotou a experimentálně naměřenou, která je větší, lze vysvětlit tím, že pohyb balónku i vlákna nebyl po celou dobu pohybu kolmý k podložce. Balónek se pohyboval chvílemi i v horizontálním směru, takže došlo k prověšení vlákna a vlečení jeho části po podložce.

Závěrem lze konstatovat, že námi analyzovaný pohyb Buquoyova vlákna pouze částečně odpovídá teoretickým závěrům, které učinili autoři v [1]. Rozdíl je zřejmě způsoben odporem vzduchu při pohybu balónku, který autoři v [1] do modelu nezahrnuli.

Literatura

[1] Šíma V and Podolský J 2005 Buquoy´s problem *Eur. J. Phys.* **26** 1037-1045

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

přiroda

jan.riha@upol.cz, cenek.kodejska@upol.cz