Čeněk Kodejška
Střední škola aplikované kybernetiky
10/2006

Platí opravdu rovnost $e^{i\pi} = -1$?

1. Výchozí předpoklady rovnice

Je obecně známo, že Taylorův rozvoj funkce sin x a cos x je dán následujícími vztahy:

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (1)$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (2)$$

stejně tak jako rozvoj pro e^t:

$$e^t = 1 + t + \tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{t^3}{3!} + \tfrac{t^4}{4!} + \tfrac{t^5}{5!} + \tfrac{t^6}{6!} + \tfrac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (3)$$

Pokud za *t* dosadíme ryze komplexní číslo *ix*, lze členy obsahující sudé mocniny nahradit výrazem *cos x* a členy liché, po vytknutí imaginární jednotky, můžeme substituovat výrazem *i sin x*, takže lze psát:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (4)$$

a po dosazení π za *x* konečně obdržíme výsledek, který mnoho matematiků na celém světě považuje za nejsenzačnější matematický výsledek všech dob:

$$e^{i\pi} = -1 \qquad (5)$$

2. Odvození logaritmu ryze komplexního čísla

Uvedenou rovnici (5) logaritmujeme, přičemž **–1** nahradíme výrazem $\boldsymbol{i^2}$. Získáme následující rovnost:

$$i\pi \ln e = \ln i^2 \qquad (6)$$

a po další úpravě:

$$i\pi = 2 \ln i \qquad (7)$$

nebo-li

$$\ln i = i\tfrac{\pi}{2} \qquad (8)$$

Dostáváme tedy logaritmus ryze imaginárního komplexního čísla. Obecně pak pro komplexní číslo *bi* dostaneme jeho logaritmus jako

$$\ln(bi) = \ln b + \ln i = \ln b + i\tfrac{\pi}{2} \qquad (9)$$

Pro komplexně sdružené ryze imaginární číslo získáme analogickým postupem (např. tak, že rovnici (5) vynásobíme výrazem i a následným logaritmováním) vztah

$$i\pi \ln e + \ln i = \ln(-i) \qquad (10),$$

a po dosazení z rovnice (8) a úpravě

$$\ln(-i) = i\tfrac{3}{2}\pi \qquad (11)$$

Analogicky vztahu (9) pak obecně pro číslo ($-bi$) dostaneme

$$\ln(-bi) = \ln b + \ln(-i) = \ln b + i\tfrac{3}{2}\pi \qquad (12)$$

3. Komplexní vektory

Původní rovnici (5) však můžeme upravit ještě dalším způsobem. Pokud ji vynásobíme číslem – 1 a následně logaritmujeme, získáme

$$\ln((-1)\cdot e^{i\pi}) = \ln 1 \qquad (13)$$

a podle věty o logaritmu součinu následně

$$\ln(-1) + \ln e^{i\pi} = 0 \qquad (14)$$

Převedeme-li druhý člen na pravou stranu a upravíme-li exponent, dostaneme

$$\ln(-1) = \ln e^{-i\pi} \qquad (15)$$

a následným odlogaritmováním konečně

$$e^{-i\pi} = -1 \qquad (16)$$

Pokud má platit současně rovnost (5) i rovnost (16), plyne z rovnosti levých stran, že

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} \qquad (17)$$

Tato exponenciální rovnice může být identicky splněna pouze v případě, že platí

$$i\pi = 0 \qquad (18)$$

Vezmeme-li v úvahu, že $i \neq 0, \pi \neq 0$, může se na první pohled zdát, že tato rovnost neplatí.

Tento problém může být odstraněn tak, že zavedeme dva vektory, $\vec{i} = (0, i), \vec{\pi} = (\pi, 0)$, kde vektor ***i*** nazveme *komplexním vektorem*. Skalární součin takto definovaných vektorů je pak roven nule a je tedy identicky splněna rovnost (18).

4. Platnost vztahu $e^{i\pi} = -1$

Jak jsme dokázali v rovnosti (18), $i\pi = 0$, a tedy $e^{i\pi} = 1$, což je v protikladu s původním vztahem (5).
Tuto nesrovnalost můžeme elegantně odstranit jednoduchým způsobem. Místo výrazu $i\pi$ použijeme výraz $2i\pi$, tedy plný úhel. Rovnost (5) pak přechází na tvar

$$e^{2i\pi} = 1 \qquad (19),$$

který již splňuje podmínku identity (18).

Na závěr poznamenejme, že výraz $2i\pi$ představuje obvod kružnice o poloměru i a rovnost (19) tak nabývá ještě větší zajímavosti než původní rovnost (5), která nemá obecnou platnost.

5. Závěr

V této práci jsme ukázali, že matematiky obdivovaný vztah $e^{i\pi} = -1$ nemá obecnou platnost, protože nesplňuje podmínku $i\pi = 0$, která vyplyne při použití hodnot π a $-\pi$ v obecně přijímaném vztahu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
Zavedením pojmu *komplexní vektor* jsme dokázali, že skalární součin takto definovaných vektorů $\vec{i} = (0, i), \vec{\pi} = (\pi, 0)$ je roven nule a původní vztah $e^{i\pi} = -1$ by měl být nahrazen vztahem obecné platnosti, totiž: $e^{2i\pi} = 1$.