videlně, takže jejich vliv na výsledek měření je do určité míry stálý – výsledek měření buď soustavně zmenšují, nebo zvětšují.

Příčinu systematických chyb lze často zjistit a výsledek měření opravit. Je-li příčinou systematické chyby metoda měření, odstraníme chybu použitím vhodnější metody nebo výsledek opravíme výpočtem. Chybu měřicích přístrojů lze značně zmenšit cejchováním přístrojů, tj. srovnáním s přístroji dokonalejšími. Na zmenšení chyb, jejichž původ je v pozorovateli, má velký vliv pozornost při měření, praxe a cvik.

Náhodné chyby jsou takové, které jsou výsledkem zcela nepravidelných vlivů. Projevují se tím, že výsledky opakovaných měření téže veličiny za stejných podmínek se vždy poněkud navzájem liší. Naměřené hodnoty jsou pak rozptýleny kolem nějaké střední hodnoty a při velkém počtu měření se v tomto rozptýlení objeví jisté zákonitosti, kterými se zabývá statistika.

Náhodné chyby nemůžeme odstranit. Na základě výsledků, ke kterým dospěla statistika, můžeme však z výsledků opakovaného měření určit **nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny** a stanovit, s jakou přesností byla určena.

V laboratorních pracích budeme číselné hodnoty fyzikálních veličin jednak zjišťovat **bezprostředním měřením**, jednak určovat **výpočtem z naměřených veličin**.

Bezprostřední měření fyzikální veličiny

Vykonáme-li n měření fyzikální veličiny x (např. délky), označíme naměřené hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nejpravděpodobnější hodnota naměřené veličiny je **aritmetický průměr** $\bar{x}$ z naměřených hodnot, definovaný vztahem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Přesnost měření odhadneme pomocí odchylek jednotlivých naměřených hodnot od aritmetického průměru. Odchylky jsou : $\Delta x_1 = \bar{x} - x_1$, $\Delta x_2 = \bar{x} - x_2, \ldots, \Delta x_n = \bar{x} - x_n$. Je zřejmé, že některé odchylky jsou kladné, jiné záporné. Aritmetický průměr má tu vlastnost, že součet všech odchylek naměřených hodnot od aritmetického průměru je rovný nule, tedy součet kladných odchylek má stejnou velikost jako součet záporných odchylek. Tuto skutečnost můžeme použít pro kontrolu, že jsme aritmetický průměr i odchylky stanovili správně.

Přesnost měření vyjádříme pomocí **průměrné odchylky** Δx, kterou určíme

jako aritmetický průměr absolutních hodnot všech odchylek od aritmetického průměru, tedy

$$\Delta x = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \cdots + |\bar{x} - x_n|}{n}.$$

Průměrnou odchylku zaokrouhlíme na jednu platnou číslici. Aritmetický průměr $\bar{x}$ upravíme tak, aby průměrná odchylka Δx zasahovala poslední platné místo aritmetického průměru. Výsledek uvádíme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \Delta x.$$

Jako příklad zpracování naměřených hodnot uvedeme měření délky.

Příklad 1

Máme změřit délku jedné hrany kvádru. Délkovým měřidlem opakovaně změříme délku zvolené hrany (měříme ji na různých místech) a výsledky přehledně zapíšeme do tabulky (tabulka 1).

Měření délky **Tabulka 1**

Číslo měření i	$\frac{a_i}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta a_i = \bar{a} - a_i}{\text{mm}}$
1	46,5	−0,12
2	46,2	0,18
3	46,4	−0,02
4	46,4	−0,02
5	46,1	0,28
6	46,3	0,08
7	46,7	−0,32
8	46,2	0,18
9	46,7	−0,32
10	46,3	0,08
Součet abs. hodnot	463,8	1,60
Aritmetický průměr	46,38	0,16

Aritmetický průměr absolutních hodnot všech odchylek od aritmetického průměru $\bar{a}$ neboli průměrná odchylka Δa je v našem případě $\Delta a = 0,16$ mm, po zaokrouhlení na jedno platné místo je $\Delta a = 0,2$ mm. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na desetiny milimetru (řád průměrné odchylky), tedy $\bar{a} = 46{,}4$ mm a výsledek měření zapíšeme ve tvaru

$$a = (46{,}4 \pm 0{,}2)\ \text{mm}.$$

Průměrná odchylka vyjádřená v jednotkách měřené veličiny se nazývá **absolutní průměrná odchylka** (u našeho příkladu 0,2 mm).

Pro posouzení přesnosti měření má větší význam **relativní průměrná odchylka** δx (krátce **relativní odchylka**). Určíme ji jako podíl průměrné odchylky a aritmetického průměru, tedy

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}.$$

Relativní odchylku vyjadřujeme obvykle v procentech. Relativní odchylku v procentech vypočteme ze vztahu

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\ \%.$$

V případě měření délky hrany kvádru uvedeného v tab. 1 dostaneme

$$\delta a = \frac{0{,}2\ \text{mm}}{46{,}6\ \text{mm}} \cdot 100\ \% = 0{,}43\ \%.$$

Laboratorní měření považujeme za dostatečně přesné, je-li relativní odchylka menší než 1 %. U provozních měření ve výrobě lze někdy považovat za dostatečně přesné i měření s relativní odchylkou 1,5 % až 5 %. Závisí to na druhu používané technologie a na účelu, jemuž má výrobek sloužit. Měření délky hrany kvádru bylo tedy dostatečně přesné.

Příklad 2

Předpokládejme, že jsme určili měřením dvě různé hodnoty délek takto:

$$a = (10{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{m}$$
$$b = (1{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{m}$$

Která hodnota vyjadřuje přesnější výsledek měření?

Přestože je průměrná odchylka u obou výsledků stejná, je druhé měření méně přesné. V našem případě jsou relativní odchylky

$$\delta a = \frac{\Delta a}{\bar{a}} = \frac{0{,}1\ \text{m}}{10{,}0\ \text{m}} = 0{,}01,$$

$$\delta b = \frac{\Delta b}{\bar{b}} = \frac{0{,}1\ \text{m}}{1{,}0\ \text{m}} = 0{,}1.$$

Relativní odchylka měřené délky a je 0,01, tj. 1 %, relativní odchylka měřené délky b je 0,1, tj. 10 %. Můžeme tedy říci, že délka a byla změřena s desetkrát větší přesností než délka b.

Na závěr si celý postup pro početní zpracování souboru naměřených hodnot stručně zopakujme:

1. Naměřené hodnoty a_i zapíšeme do předem připravené tabulky.
2. Vypočítáme aritmetický průměr $\bar{a}$ naměřených hodnot, který představuje střední hodnotu měřené veličiny; počítáme o jedno místo více než bylo měřeno.
3. Určíme a zapíšeme odchylky jednotlivých měření.
4. Vypočítáme průměrnou odchylku Δa jako aritmetický průměr absolutních hodnot všech odchylek.
5. Průměrnou odchylku zaokrouhlíme na jednu platnou číslici.
6. Aritmetický průměr naměřených hodnot zaokrouhlíme na stejný počet desetinných míst jako má průměrná odchylka.
7. Určíme relativní odchylku měření a vyjádříme ji v procentech.
8. Výsledek měření zapíšeme ve tvaru

$$a = \bar{a} \pm \Delta a, \qquad \delta a = \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot 100\ \%.$$

Výpočet fyzikální veličiny pomocí změřených veličin

Často se dostáváme do situace, kdy určitou veličinu neměříme přímo měřicím přístrojem, ale vypočítáváme ji pomocí jiných, již změřených veličin.

Chceme např. určit obsah obdélníkové stěny kvádru, jehož hrany jsme změřili. K dispozici máme výsledky měření rozměrů stěny, např.:

$$a = (46{,}4 \pm 0{,}2)\ \text{mm}, \qquad \delta a = 0{,}43\ \%,$$
$$b = (72{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{mm}, \qquad \delta b = 0{,}42\ \%.$$

Víme, že plošný obsah obdélníku určíme jako součin jeho stran, tedy podle vzorce $P = ab$. Jak však stanovíme odchylku takto vypočtené hodnoty?

Nejprve určíme střední hodnotu plošného obsahu jako součin středních hodnot změřených stran, tedy

$$\bar{P} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 46{,}4\ \text{mm} \cdot 72{,}1\ \text{mm} \doteq 3\,345\ \text{mm}^2.$$

Cvičení 1 MĚŘENÍ DÉLKY

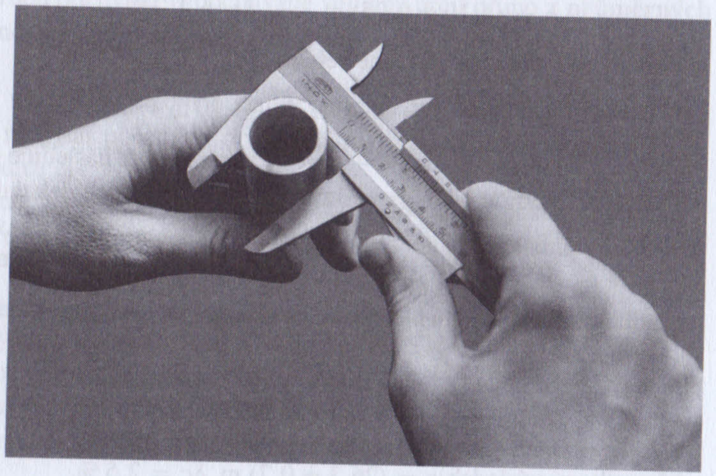
Pomůcky: měřené tělísko (ve tvaru válce nebo kvádru), posuvné měřidlo, mikrometrické měřidlo

K měření větších délek nebo k méně přesnému měření menších délek používáme buď měřidla pásová, dělená na milimetry, nebo měřidla tyčová, která bývají zhotovena z různých materiálů.

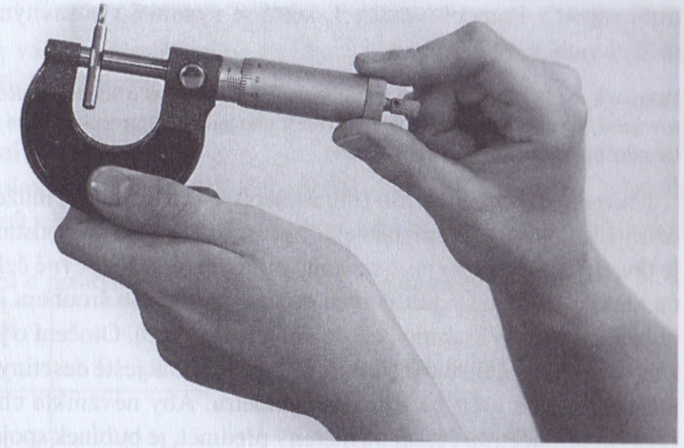
Pásová i tyčová měřidla mohou mít dva druhy chyb: jednak se jejich celková délka může lišit od správné hodnoty, jednak mohou být nerovnoměrně dělená. První druh chyby lze odstranit porovnáním měřidla s měřidlem správným, druhý lze omezit tím, že danou délku měříme na různých místech měřidla. Odečítáme přitom oba konce měřené délky a u délek do 1 metru odhadujeme desetiny milimetru.

K měření menších délek používáme **kontaktní měřidla**, u nichž vkládáme měřený předmět mezi čelisti měřidla. Sem patří především posuvné měřidlo (obr. L-1) a mikrometrické měřidlo (obr. L-2).

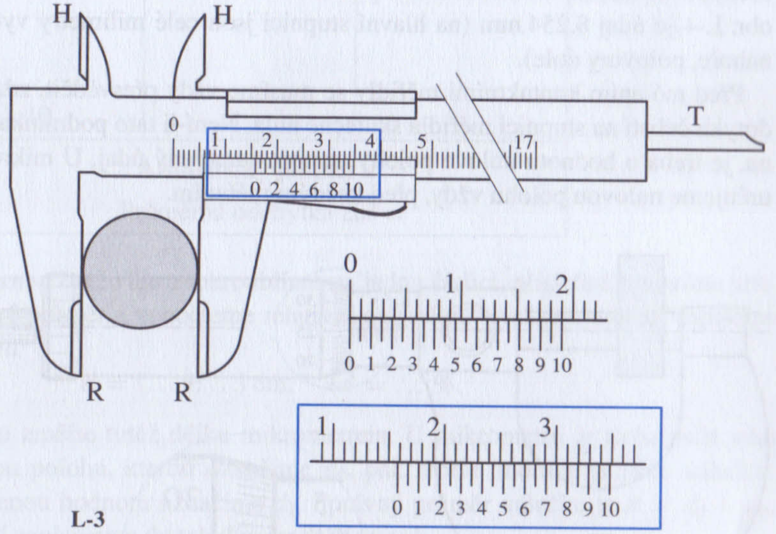
Posuvné měřidlo je jednoduchý přístroj, jehož princip je patrný z obr. L-3. Měřený předmět vkládáme mezi dvě ramena R kolmá ke stupnici dělené na milimetry, z nichž jedno je pevné a druhé posuvné. Na posuvném rameni je tzv. **nonius**, obvykle dvacetinný, který umožňuje čtení s přesností na 0,05 mm. Nonius je sestrojen tak, že 19 dílkům hlavní stupnice odpovídá 20 dílků nonia.



L-1



L-2



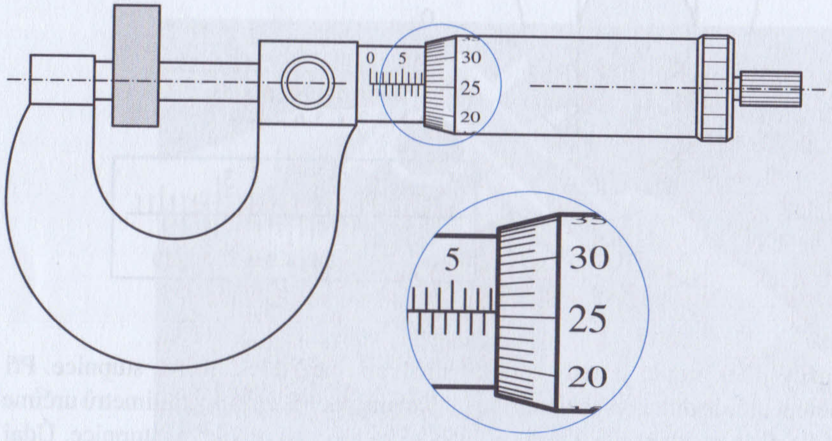
L-3

Každý dílek nonia je tedy o 0,05 mm kratší než dílek hlavní stupnice. Při měření určuje nultá ryska nonia celý počet milimetrů, zlomky milimetrů určíme podle čísla rysky nonia, která splývá s některou ryskou hlavní stupnice. Údaj na posuvném měřidle na obr. L-3 je tedy 1,580 cm. Obě ramena vybíhají na opačnou stranu v hroty H, jimiž lze měřit vnitřní rozměry dutých těles (světlost trubic apod.). Pomocí tyčinky T, která se vysouvá s posuvným ramenem, lze měřit hloubku dutin.

Poznámka: Některá posuvná měřidla mají navíc stupnicí dělenou v palcích (každý palec je rovnoměrně rozdělen na 16 dílků. Nonius k této palcové stupnici je dělen na 8 dílků, tzn. že lze odečítat až stodvacetiosminy palce).

Mikrometrické měřidlo (mikrometr) je přístroj, jímž můžeme měřit malé délky (do 25 mm) s poměrně velkou přesností (obr. L-4). Podstatou mikrometru je tzv. *mikrometrický šroub* se stoupáním 0,5 mm. Na pevné čelisti je stupnice, na které odečítáme počet celých otoček šroubu. Se šroubem je pevně spojen bubínek opatřený stupnicí, rozdělenou na 50 dílků. Otočení o jeden dílek tedy znamená posuv čelisti o 0,01 mm. Odhadujeme-li ještě desetiny dílků, můžeme měřenou délku určit na tisíciny milimetru. Aby nevznikla chyba způsobená různým přitlačením čelistí na měřený předmět, je bubínek spojený se šroubem navíc opatřen momentovou spojkou (tzv. „řehtačkou"), která se při dosažení určitého kroutícího momentu začne protáčet. Na mikrometru znázorněném na obr. L-4 je údaj 8,254 mm (na hlavní stupnici jsou celé milimetry vyneseny nahoře, poloviny dole).

Před měřením kontaktními měřidly se musíme vždy přesvědčit, zda je při dotyku čelistí na stupnici měřidla skutečně nula. Není-li tato podmínka splněna, je třeba o hodnotu nulové polohy opravit naměřený údaj. U mikrometru určujeme nulovou polohu vždy, před každým měřením.



L-4

Úkol

Změřte průměr válečku (popř. stranu kvádru) posuvným měřidlem a mikrometrickým měřidlem. Porovnejte výsledky obou měření.

Postup měření

Zkontrolujte nulovou polohu posuvného měřidla. Změřte na různých místech válečku desetkrát jeho průměr. Měření zapisujte do předem připravené tabulky:

Měření průměru d posuvným měřidlem **Tabulka 3**

Číslo měření i	d cm	Δd cm
1		
2		
.		
.		
10		
Aritmetický průměr $\bar{d}$ =		
Průměrná odchylka Δd =		

Průměrnou odchylku zaokrouhlíme na jednu číslici, příslušně upravíme aritmetický průměr a vypočteme relativní odchylku. Výsledek měření zapíšeme ve tvaru

$$d = (\ldots \pm \ldots)\ \text{cm}, \qquad \delta d = \ldots\ \%.$$

Nyní změřte tutéž délku mikrometrem. U mikrometru je třeba určit jeho nulovou polohu, kterou označíme d_0, pak teprve měříme průměr válečku; naměřenou hodnotu označíme d_1. Správný průměr válečku je $d = d_1 - d_0$. Měření zapisujeme do tabulky na další straně.