VZOROVÝ TEST PRO 1. ROČNÍK (1. A, 3. C)

max. 1 bod

1 **Zjednodušte** daný příklad.

$$\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

max. 3 body

2 Ve které z následujících možností je uveden **správný postup usměrnění** daného zlomku a **správný výsledek**?

$$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$$

A. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{9}$

B. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{9}$

C. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{3\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$

D. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{3\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}$

E. žádná z uvedených možností není správná

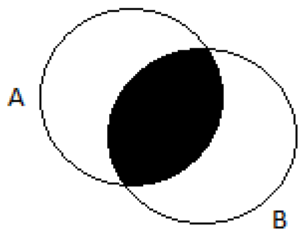
max. 1 bod

3 **Zjednodušte** daný příklad.

$$\frac{1}{6r-4s}-\frac{1}{6r+4s}+\frac{3r}{9r^2-4s^2}=$$

max. 1 bod

4 Která množinová operace je znázorněna na obrázku černou výplní?



A. $A \cup B$

B. $A \cap B$

C. $A - B$

D. B'_A

E. žádná z uvedených možností není správná

max. 2 body

5 **Určete průnik** množiny A a množiny B, přičemž:

$A = \{x \in \mathbb{Z};\ x < 15\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 11\}$

A. $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z};\ 11 \leq x < 15\}$

B. $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z};\ 11 < x < 15\}$

C. $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z};\ x < 15\}$

D. $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \leq 15\}$

E. žádná z uvedených možností není správná

max. 2 body

6 Jaký je správný **prvočíselný rozklad** čísla 380 a čísla 276?

A. $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$

$276 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$

B. $380 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$

$276 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

C. $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$

$276 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$

D. $380 = 2^3 \cdot 5 \cdot 19$

$276 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$

E. žádná z uvedených možností není správná

max. 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Restaurace je rozdělena na část kuřáckou a část nekuřáckou. V obou místnostech jsou dány stoly, u kterých je vždy stejný počet židlí. V první části může posedět 104 strávníků, ve druhé 120.

7 Určete, kolik židlí je nanejvýše u každého stolu.

max. 4 body

8 Přiřaďte k funkcím f_1, f_2 (8.1 – 8.2) jejich **definiční obor** $(A - E)$

8.1 $f_1: y = \sqrt{x+6}$

8.2 $f_2: y = \sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}$

A. $x \in (6; +\infty)$

B. $x \in \mathbb{R} - \{6\}$

C. $x \in < 3; 8 >$

D. $x \in \mathbb{R} - \{3; 8\}$

E. $x \in < -6; +\infty)$

max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

V oboru $\mathbb{R}$ jsou dány rovnice:

I. $\frac{2x+8}{x+4} = 0$

II. $2x^2 - 5x - 12 = 0$

III. $\sqrt{13 - 2x} = 3$

9 Která z uvedených rovnic **nemá řešení**?

A. I. a II.

B. II. a III.

C. pouze I.

D. pouze III.

E. I. a III.

max. 1 bod

10 V oboru $\mathbb{R}$ **řešte soustavu rovnic**.

$-6x + 4y - 16 = 0$

$-4x + 6y = 54$

max. 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Jestliže zvětšíme jmenovatele neznámého zlomku o číslo 1, dostaneme $\frac{1}{4}$. Jestliže zvětšíme v tom samém zlomku čitatele o číslo 1, pak dostaneme $\frac{1}{3}$.

11 Na základě uvedeného textu určete, o který zlomek se jedná.

max. 3 body

12 Proveďte **dělení** daných **polynomů**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

$(x^3 + 5x - 3 - 3x^2) : (x - 1)$

max. 3 body

13 V oboru $\mathbb{R}$ **vyřešte** zadanou **rovnici**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

max. 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Tovární komín pozorujeme ve výškovém úhlu 40° a stojíme přitom 20 metrů vzdáleni od paty věže kostela.

14 Uveďte, kolik metrů měří komín. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

max. 3 body

15 V množině $\mathbb{R}$ **řešte** následující **rovnici**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

$|x + 3| + |x - 2| = 7$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDLI VŠECHNY ODPOVĚDI.

Autorské řešení

max. 1 bod

1 **Zjednodušte** daný příklad.

$$\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Nejprve umocníme každý člen v závorce mocninou, která je za závorkou. Získáváme tvar $a^{\frac{2}{6}} \cdot b^{\frac{3}{8}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{3}{24}}$. Nyní společně vynásobíme mocniny o stejném základu (dle pravidla $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$). Dostáváme $a^{\frac{3}{6}} \cdot b^{\frac{12}{24}}$. Povšimneme si, že mocniny nejsou v základním tvaru, proto je do něj upravíme: $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$. Jelikož je mocnina obou základů stejná, můžeme upravit na tvar: $(a\mathrm{b})^{\frac{1}{2}}$ a nebo na tvar pod odmocninou: $\sqrt{ab}$.

Řešení: $(ab)^{\frac{1}{2}}$

max. 3 body

2 Ve které z následujících možností je uveden **správný postup usměrnění** daného zlomku a **správný výsledek**?

$$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$$

K vyřešení tohoto příkladu je nutná znalost vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli, musíme celý zlomek vynásobit (tzv. usměrnit) zlomkem $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$. Ve jmenovateli tedy získáváme vztah $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$. To nám nápadně připomíná výše uvedený vzorec. Provedeme tedy úpravu podle zmíněného vzorce a ve jmenovateli dostaneme $\sqrt{7}^2 - \sqrt{2}^2 = 7 - 2 = 5$. Nyní se vrátíme zpět k celému příkladu. Oba čitatele zlomků spolu vynásobíme a poté již dostáváme výsledný tvar: $\frac{3\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$

Řešení: C

max. 1 bod

3 **Zjednodušte** daný příklad.

$$\frac{1}{6r-4s}-\frac{1}{6r+4s}+\frac{3r}{9r^2-4s^2}$$

Sčítání zlomků provádíme převodem na společného jmenovatele. Nejprve si upravíme jmenovatele jednotlivých zlomků. Povšimneme si, že u prvních dvou zlomků lze vytknout číslo 2 a ve jmenovateli třetího zlomku rozpoznáme vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Po provedení těchto úprav převedeme všechny zlomky na společného jmenovatele. Poté sečteme čísla v čitateli. V čitateli vidíme, že je možnost vytknout číslo 2. Nyní můžeme členy, které jsou stejné v čitateli i ve jmenovateli zkrátit. Po této úpravě získáme konečný tvar a celkové řešení daného příkladu.

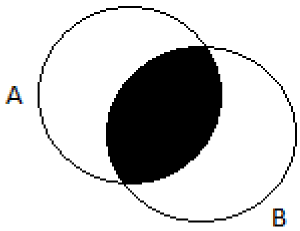
$$\frac{1}{6r-4s}-\frac{1}{6r+4s}+\frac{3r}{9r^2-4s^2}=\frac{1}{2(3r-2s)}-\frac{1}{2(3r+2s)}+\frac{3r}{(3r+2s)(3r-2s)}=\frac{(3r+2s)-(3r-2s)+6r}{2(3r-2s)(3r+2s)}=$$

$$=\frac{6r+4s}{2(3r-2s)(3r+2s)}=\frac{2(3r+2s)}{2(3r-2s)(3r+2s)}=\frac{1}{3r-2s}$$

Řešení: $\frac{1}{3r-2s}$

max. 1 bod

4 Která množinová operace je znázorněna na obrázku černou výplní?



Řešení tohoto příkladu je postaveno na znalosti množinových operací. Musíme znát definice sjednocení množin, jejich průniku, rozdílu, či doplňku jedné množiny na druhé. V tomto případě se nám při pohledu na obrázek musí vybavit definice průniku dvou množin, která říká, že průnikem dvou množin A, B jsou všechny prvky, které patří do množiny A a současně do množiny B.

Řešení: B

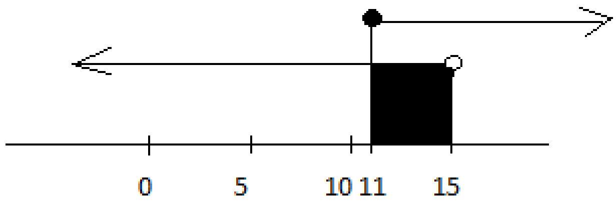
max. 2 body

5 **Určete průnik** množiny A a množiny B, přičemž:

$A = \{x \in \mathbb{Z};\ x < 15\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 11\}$

Řešení této úlohy je nejlepší provést tak, že si celou situaci zakreslíme. Samozřejmě i zde potřebujeme mít znalost základních definic oborů množin.



Z obrázku již názorně vidíme, která čísla jsou průnikem množiny A a B.

Řešení: A

max. 2 body

6 Jaký je správný **prvočíselný rozklad** čísla 380 a čísla 276?

Pro vytvoření prvočíselného rozkladu lze využít hned několik způsobů. Já zde uvedu metodu, kterou znám již ze základní školy a přijde mi nejjednodušší.

380	2
190	2
95	5
19	19
1	

276	2
138	2
69	3
23	23
1	

Provádíme postupné dělení čísla na levé straně prvočísly. Na konci musíme získat číslo 1. Z pravého sloupce je jasně vidět onen hledaný prvočíselný rozklad.

$380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$

$276 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$

Řešení: C

max. 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Restaurace je rozdělena na část kuřáckou a část nekuřáckou. V obou místnostech jsou dány stoly, u kterých je vždy stejný počet židlí. V první části může posedět 104 strávníků, ve druhé 120.

7 Určete, kolik židlí je nanejvýše u každého stolu.

Řešení takovéto slovní úlohy provádíme pomocí největšího společného dělitele.
Stačí tedy, když zjistíme, jaký je největší společný dělitel čísel 104 a 120 a máme výsledek. Číslo 104 si rozložíme na prvočíselný rozklad jako $104 = 2^3 \cdot 13$ a číslo 120 rozložíme jako $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Největší společný dělitel obou čísel tedy bude $D(104, 120) = 2^3 = 8$.
U každého stolu je tedy 8 židlí.
Řešení: 8

max. 4 body

8 Přiřaďte k funkcím f_1, f_2 (8.1 – 8.2) jejich **definiční obor** (A – E)

8.1 $f_1: y = \sqrt{x+6}$

8.2 $f_2: y = \sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}$

8.1 Pro funkci $f_1: y = \sqrt{x+6}$ platí, že výraz pod odmocninou musí být nezáporný, to znamená, že $x + 6 \geq 0$. Vyřešením této jednoduché nerovnice získáme výsledek $x \geq -6$, který zapíšeme ve tvaru $x \in < -6;\ +\infty)$.
$D_f = < -6; +\infty)$
Řešení: E

8.2 Pro funkci $f_2: y = \sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}$ platí, že výrazy pod odmocninou musí být nezáporná čísla, to znamená, že $x - 3 \geq 0$ a zároveň $8 - x \geq 0$. Vyřešením nerovnic získáme dva dílčí výsledky a to: $x \geq 3$ a $x \leq 8$. Definičním oborem je průnik těchto dvou řešení. Odtud získáme konečné řešení, kterým je:
$D_f = < 3; 8 >$.
Řešení: C

max. 3 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

V oboru $\mathbb{R}$ jsou dány rovnice:

I. $\frac{2x+8}{x+4} = 0$

II. $2x^2 - 5x - 12 = 0$

III. $\sqrt{13 - 2x} = 3$

9 Která z uvedených rovnic **nemá řešení**?

Pro vyřešení této úlohy je nutné spočítat každou z uvedených rovnic a zjistit, zda je, či není řešitelná.

I. $\frac{2x+8}{x+4} = 0$

Nejprve určíme podmínky dané rovnice. Jmenovatel musí být různý od nuly, získáme tedy podmínku: $x \neq -4$. Pokud máme rovnici v podílovém tvaru, kdy na pravé straně je číslo 0, je rovnice rovna 0 právě tehdy, když je její čitatel roven nule. Stačí tedy pouze vyřešit rovnici $2x + 8 = 0$, odtud získáme výsledek $x = -4$. Nyní provedeme kontrolu s podmínkami. Zjistíme, že výsledek odporuje podmínkám, proto rovnice nemá řešení $\boldsymbol{K = \emptyset}$**.**

II. $2x^2 - 5x - 12 = 0$

Řešení této rovnice spočívá v rozkladu kvadratického trojčlenu. Ten provedeme pomocí vzorce pro výpočet kořenů rovnice: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Po dosazení získáme: $\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot(-12)}}{2\cdot2}$ a odtud již vypočítáme kořeny rovnice. Těmi jsou: $-\frac{3}{2};\ 4$.
Diskriminant *D* vyšel kladný, tudíž je rovnice řešitelná a jejím řešením je $K = \left\{-\frac{3}{2};\ 4\right\}$.

III. $\sqrt{13 - 2x} = 3$

Nejprve určíme podmínky dané rovnice. Platí, že výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Definičním oborem rovnice tedy je $x \in (-\infty; \frac{13}{2})$. Iracionální rovnice řešíme tak, že nejprve pomocí umocnění odstraníme odmocninu. Postupujeme tedy takto:

$\sqrt{13 - 2x} = 3 \quad /^2$

$13 - 2x = 9$

$x = 2$

Tento výsledek neodporuje podmínkám a je řešením rovnice.

Řešení: C

max. 1 bod

10 V oboru $\mathbb{R}$ **řešte soustavu rovnic**.

$-6x + 4y - 16 = 0$

$-4x + 6y = 54$

Prvním krokem při řešení soustavy rovnic je, že si převedeme čísla s neznámou na jednu stranu a čísla bez neznámých na druhou. Soustava poté dostane tvar:

$-6x + 4y = 16$

$-4x + 6y = 54$

Soustava se dá řešit několika metodami. Buď pomocí dosazovací metody, nebo pomocí sčítací metody, a nebo pomocí determinantů. Využijme například metodu dosazovací.

Z první rovnice si vyjádříme, čemu se rovná například *y*. Po úpravách získáme $y = \frac{3}{2}x + 4$. Nyní tuto hodnotu dosadíme za *y* do druhé rovnice:

$-4x + 6\left(\frac{3}{2}x + 4\right) = 54$. Následující rovnici vypočítáme a získáme hodnotu neznámé *x*: $x = 6$. Toto číslo nyní pouze dosadíme za *x* do některé z původních rovnic a získáme tak hodnotu neznámé *y*: $y = 13$.

Řešení: $\boldsymbol{x = 6; y = 13}$

max. 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Jestliže zvětšíme jmenovatele neznámého zlomku o číslo 1, dostaneme $\frac{1}{4}$. Jestliže zvětšíme v tom samém zlomku čitatele o číslo 1, pak dostaneme $\frac{1}{3}$.

11 Na základě uvedeného textu určete, o který zlomek se jedná.

Řešení této slovní úlohy spočívá v soustavě rovnic o dvou neznámých. Ze zadání si vytvoříme dvě dílčí rovnice:

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$$

Při řešení postupujeme stejně, jako v předchozím příkladu. Z jedné rovnice si vyjádříme například neznámou *x:* $x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$. Tuto hodnotu poté dosadíme za *x* do druhé rovnice. Získáme: $\frac{\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}+1}{y} = \frac{1}{3}$. Po úpravách dostaneme hodnotu neznámé y: $y = 15$. Tu dosadíme za *y* do některé z původních rovnic a získáme hodnotu neznámé *x*: $x = 4$. Tímto jsme získali čitatele a jmenovatele hledaného zlomku. Ten má tedy hodnotu $\frac{4}{15}$.

Řešení: $\frac{4}{15}$

max. 3 body

12 Proveďte **dělení** daných **polynomů**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

$(x^3 + 5x - 3 - 3x^2) : (x - 1)$

Prvním krokem, na který při dělení polynomů nesmíme zapomenout, je seřadit si oba polynomy sestupně podle velikosti exponentu.

$(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x - 1)$

Dále postupujeme následovně:

1) Vydělíme členy s nejvyššími mocninami: $x^3 : x = x^2$
2) Získaným jednočlenem vynásobíme celý dělitel (zpětně roznásobíme): $x^2(x - 1) = x^3 - x^2$
3) Od původního mnohočlenu odečteme výsledek zpětného násobení

   $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) - (x^3 - x^2) = -2x^2 + 5x - 3$
4) S výsledkem zopakujeme předchozí postup.

Konečným výsledkem dělení zadaných polynomů je: $x^2 - 2x + 3$

Řešení: $x^2 - 2x + 3$

max. 3 body

13 V oboru $\mathbb{R}$ **vyřešte** zadanou **rovnici**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Abychom dokázali spočítat tuto rovnici, musíme použít řešení pomocí substituce.

Substituce: $y = x^2$

Po dosazení neznámé *y* do původní rovnice získáme kvadratický trojčlen:

$y^2 - 5y + 6 = 0$. Pomocí vzorce $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pro výpočet kořenů rovnice zjistíme, že kořeny rovnice jsou $y_1 = 2;\ y_2 = 3$.

Tyto hodnoty poté zpětně dosadíme:

$$y_1 = x^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow |x| = \sqrt{2} \rightarrow x_1 = +\sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2}$$

$$y_2 = x^2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow |x| = \sqrt{3} \rightarrow x_1 = +\sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3}$$

$$K = \left\{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\}$$

Řešení: $K = \left\{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\}$

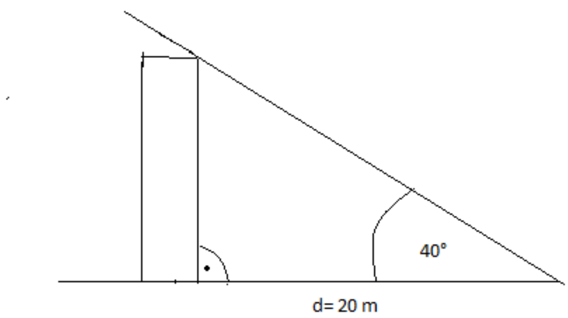
max. 1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Továrního komín pozorujeme ve výškovém úhlu 40° a stojíme přitom 20 metrů vzdáleni od paty věže kostela.

14 Uveďte, kolik metrů měří komín. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Pro řešení takovéto slovní úlohy je dobré si danou situaci zakreslit.



Z obrázku vidíme, že pro výpočet výšky komína (h) budeme potřebovat funkci tangens.

$tg\alpha = \frac{h}{d} \rightarrow h = 20 \cdot tg40 = 20 \cdot 0{,}839 = 16{,}78 = 17\ m$

Řešení: 17 m

max. 3 body

15 V množině $\mathbb{R}$ **řešte** následující **rovnici**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

$|x+3|+|x-2|=7$

Nejprve si určíme nulové body. V tomto případě jimi jsou čísla -3 a 2.

Vytvoříme si tabulku:

	$(-\infty;\ -3)$	$< -3; 2)$	$< 2; +\infty)$
$x+3$	$-\quad \to -x-3$	$+\quad \to x+3$	$+\quad \to x+3$
$x-2$	$-\quad \to -x+2$	$-\quad \to -x+2$	$+\quad \to x-2$

Z tabulky vytvoříme dílčí rovnice:

I. $-x-3-x+2=7$

$x=-4$

$-4 \in (-\infty;\ -3)$

II. $x+3-x+2=7$

$5=7$

$K=\emptyset$

III. $x+3+x-2=7$

$x=3$

$3 \in < 2; +\infty)$

Řešení: $K=\{-4; 3\}$

Klíč vzorového testu pro první ročník

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1	$(\boldsymbol{ab})^{\frac{1}{2}}$	max. 1 bod
2	**C**	max. 3 body
3	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{r}-\mathbf{2}\boldsymbol{s}}$	max. 1 bod
4	**B**	max. 1 bod
5	**A**	max. 2 body
6	**C**	max. 2 body
7	**8**	max. 1 bod
8		max. 4 body
8.1	**E**	
8.2	**C**	
9	**C**	max. 3 body
10	$\boldsymbol{x}=\mathbf{6};\ \boldsymbol{y}=\mathbf{13}$	max. 1 bod
11	$\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}$	max. 1 bod
12	$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}$	max. 3 body
13	$\boldsymbol{K}=\left\{-\sqrt{\mathbf{3}};-\sqrt{\mathbf{2}};\sqrt{\mathbf{2}};\sqrt{\mathbf{3}}\right\}$	max. 3 body
14	**17 m**	max. 1 bod
15	$\boldsymbol{K}=\{-\mathbf{4};\mathbf{3}\}$	max. 3 body

Hodnocení:

Počet bodů	Známka
26 – 30	**1**
21 – 25	**2**
15 – 20	**3**
10 – 14	**4**
9 – 0	**5**