VZOROVÝ TEST PRO 2. ROČNÍK (2. A, 4. C)

max. 3 body

1 Vypočtěte danou goniometrickou rovnici a výsledek uveďte ve stupních a radiánech.

$$\cos x + \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

---

max. 3 body

2 Řešte danou binomickou rovnici:

$$7z^3 + 24 = 0$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

max. 3 body

3 Načrtněte graf dané funkce a určete průsečíky se souřadnými osami.

$f\colon y = \dfrac{x-3}{x+3}$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

R_x

R_y

---

2 body

4 S využitím grafu mocninné funkce vzestupně porovnejte podle velikosti daná čísla:

$2^{-4}; (-1{,}5)^{-4}; 1^{-4}; 0{,}8^{-4}; (-0{,}8)^{-4}$

A) $(0{,}8)^{-4} = (-0{,}8)^{-4} < 1^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < 2^{-4}$

B) $(-0{,}8)^{-4} < 0{,}8^{-4} < 1^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < 2^{-4}$

C) $2^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < 1^{-4} < 0{,}8^{-4} = (-0{,}8)^{-4}$

D) $1^{-4} < 0{,}8^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < (-0{,}8)^{-4} < 2^{-4}$

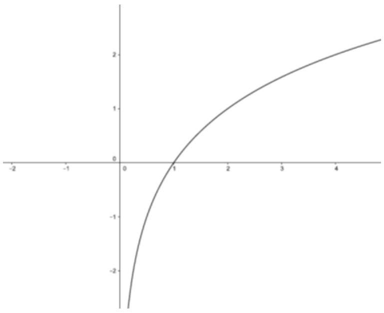
E) jiné řešení

max. 4 body

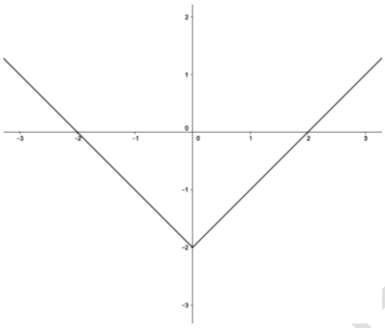
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Přiřaďte grafy funkcí (5.1-5.4) k zadaným předpisům funkcí (f_1-f_8).

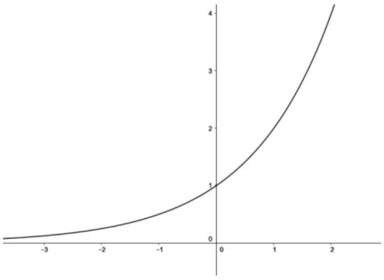
5.1



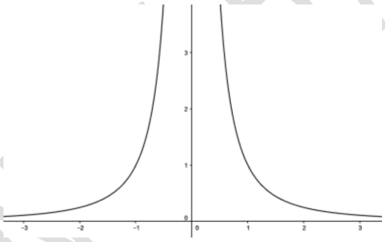
5.2



5.3



5.4



5

$f_1 \colon y = 2^x$ 5.1 ______

$f_2 \colon y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 5.2 ______

$f_3 \colon y = x^{-2}$ 5.3 ______

$f_4 \colon y = |x| - 2$ 5.4 ______

$f_5 \colon y = \frac{1}{2}^{x}$

$f_6 \colon y = \log_2 x$

$f_7 \colon y = x^2 - 4$

$f_8 \colon y = |2x - 2|$

1 bod

6 V oboru R řešte:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

---

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Na hmotný bod působí dvě síly o velikostech $\boldsymbol{F_1} = 125\ N$ a $\boldsymbol{F_2} = 75\ N$, jejichž vektory svírají úhel 60°.

7 Jak velká je výslednice vektorů sil?

A) 175 N

B) 165 N

C) 155 N

D) 145 N

E) jiné řešení

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dán trojúhelník ABC s obsahem $S = 0{,}75\ dm^2$, stranou $a = 30\ cm$ a úhlem $\gamma = 30°$.

8 Určete velikost strany b v trojúhelníku ABC.

---

1 bod

9 V oboru C řešte:

$2 + 3i = z + |z|$

---

max. 3 body

10 Rozhodněte u příkladů (10.1-10.4), zda jsou či nejsou goniometrickým tvarem komplexního čísla.

10.1 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sin\frac{11}{6}\pi + i\cos\frac{11}{6}\pi)$ Ano – Ne

10.2 $z = -17 \cdot (\sin 135° + i\cos 135°)$ Ano – Ne

10.3 $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$ Ano – Ne

10.4 $z = \cos 36° - i\sin 36°$ Ano – Ne

1 bod

11 Zjednodušte výraz a výsledek zapište v goniometrickém tvaru komplexního čísla.

$(\sqrt{3} - i)^4$

---

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Kulička vyrobená ze zlata má hmotnost 9,63 kg. Za normální pokojové teploty je hustota zlata přibližně 19,3 g/cm^3.

12 Určete průměr kuličky.

A) 4,9 cm

B) 6,8 cm

C) 9,8 cm

D) 10,8 cm

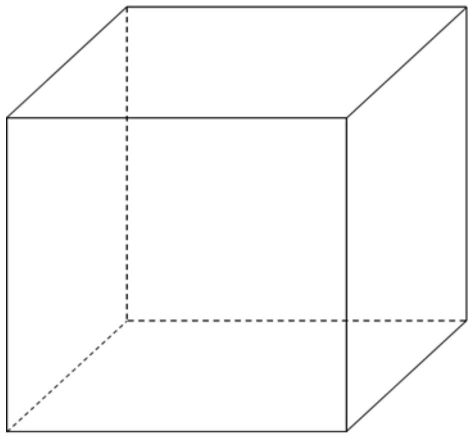
E) jiné řešení

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Je dána krychle $STUVWXYZ$ a body M, N, P, které jsou postupně středy hran TX, WX, UV.

13 Určete vzájemnou polohu přímek VM a NP.



2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Je dána pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Délka jeho podstavných hran je 9 cm a výška je rovna 4,5 cm.

14 Určete odchylku rovin ABC a BCV.

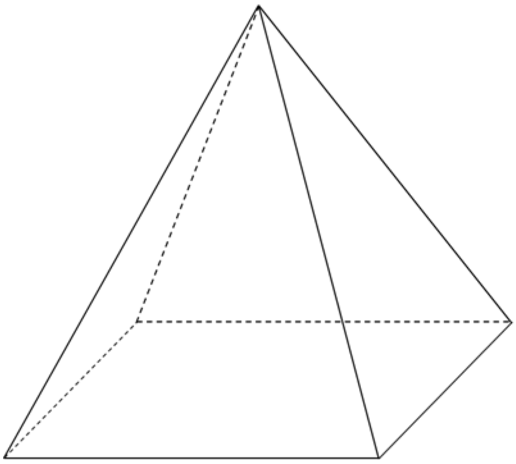
A) 25°

B) 35°

C) 45°

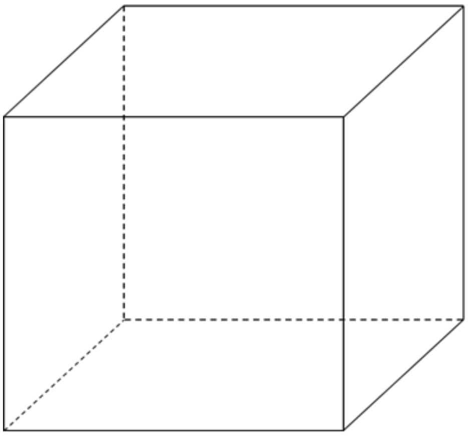
D) 55°

E) jiné řešení



1 bod

15 Určete odchylku dvou tělesových úhlopříček krychle $ABCDEFGH$ (výsledek uveďte s přesností na vteřiny). Velikost hrany krychle je a.



ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDLI VŠECHNY ODPOVĚDI.

Autorské řešení vzorového testu pro 2. ročník

max. 3 body

1 Vypočtěte danou goniometrickou rovnici a výsledek uveďte ve stupních a radiánech.

$\cos x + \sin^2 x = \frac{1}{4}$

$$\cos x + 1 - \cos^2 x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\cos^2 x - \cos x - \frac{3}{4} = 0$$

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

$$Substituce: y = \cos x$$

$$4y^2 - 4y - 3 = 0$$

$y_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4}$ $\qquad$ $y_1 = -\frac{1}{2};\ y_2 = \frac{3}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x = \frac{3}{2} \Rightarrow K = \emptyset,\ H_f = \langle -1; 1 \rangle$

Goniometrická rovnice bude mít dva kořeny $x_1\ a\ x_2$, které budou v II. A III. kvadrantu.

Hodnota $\frac{1}{2}$ odpovídá $60° = \frac{\pi}{3}$.

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi = 120° + k \cdot 360°$$

$$x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi = 240° + k \cdot 360°$$

max. 3 body

2 Řešte danou binomickou rovnici:

$7z^3 + 24 = 0$

Nejprve upravíme rovnici na $z^3 = -\frac{24}{7}$ a poté převedeme algebraický tvar komplexního čísla na goniometrický: $z^3 = \frac{24}{7} \cdot (\cos x + i \sin x)$. Pro výpočet binomické rovnice využijeme vzorec $z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$. Dále si můžeme vypočítat algebraický doplněk $\Delta = \frac{2\pi}{n}$, v našem případě $\Delta = \frac{2\pi}{3}$.

$$k = 0: z_0 = \sqrt[3]{\frac{24}{7}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$k = 1 : z_1 = \sqrt[3]{\frac{24}{7}} \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$k = 2 : z_2 = \sqrt[3]{\frac{24}{7}} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$$

max. 3 body

3 Načrtněte graf dané funkce a určete průsečíky se souřadnými osami.

$$f : y = \frac{x-3}{x+3}$$

Předpis funkce nejprve upravíme na středový tvar, abychom mohli určit střed hyperboly.

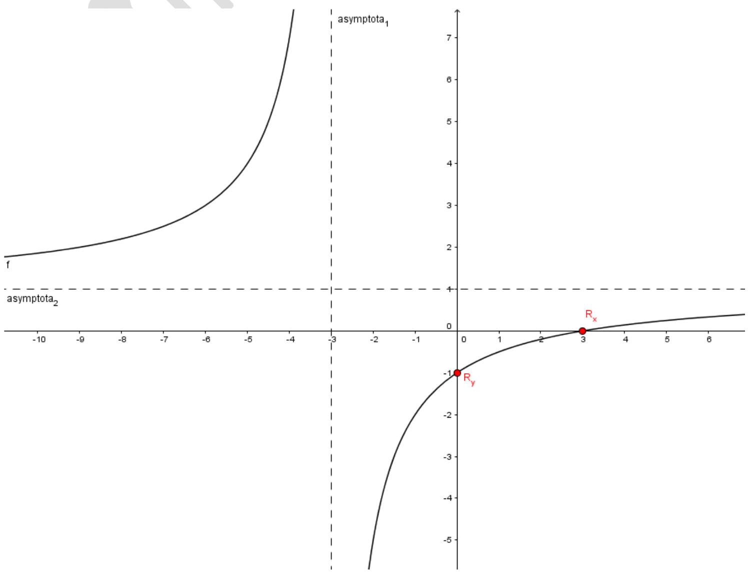
$$f : y = \frac{x-3}{x+3} = \frac{x+3-6}{x+3} = 1 + \frac{-6}{x+3}$$

$S[-3; 1]$

Souřadnice průsečík s osou x Rx zjistíme tak, že za y-souřadnici dosadíme 0 a budeme řešit jednoduchou rovnici $\frac{x-3}{x+3} = 0$. Je zde zřejmé, že rovnice bude rovna nule právě tehdy, když čitatel bude roven nule, tzn., že $x + 3 - 6 = 0$, z čehož plyne $x = 3$. Souřadnice průsečíku s osou y zjistíme tak, že za x-souřadnici dosadíme nulu, z čehož vyplývá $y = -1$.

$R_x[3; 0]$

$R_y[0; -1]$

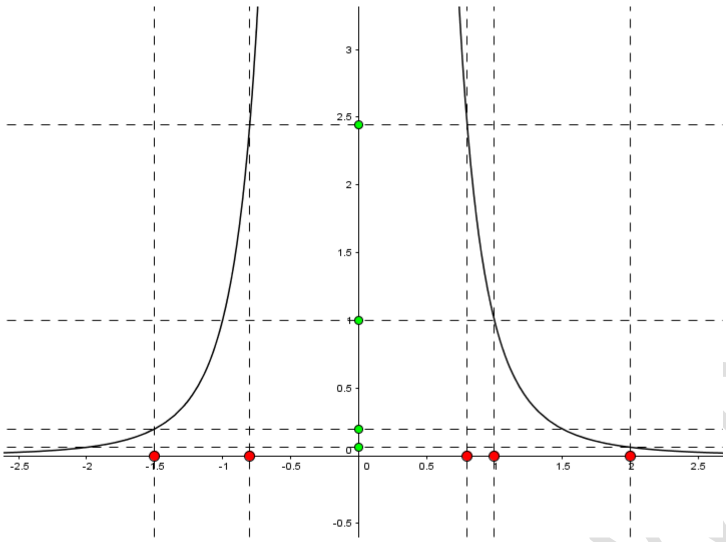


2 body

4 S využitím grafu mocninné funkce vzestupně porovnejte podle velikosti daná čísla:

$2^{-4}; (-1{,}5)^{-4}; 1^{-4}; 0{,}8^{-4}; (-0{,}8)^{-4}$

Z grafu plynou jednotlivé funkční hodnoty pro zadaná umocněná čísla. Správné řešení je za C.



A) $(0{,}8)^{-4} = (-0{,}8)^{-4} < 1^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < 2^{-4}$

B) $(-0{,}8)^{-4} < 0{,}8^{-4} < 1^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < 2^{-4}$

C) $2^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < 1^{-4} < 0{,}8^{-4} = (-0{,}8)^{-4}$

D) $1^{-4} < 0{,}8^{-4} < (-1{,}5)^{-4} < (-0{,}8)^{-4} < 2^{-4}$

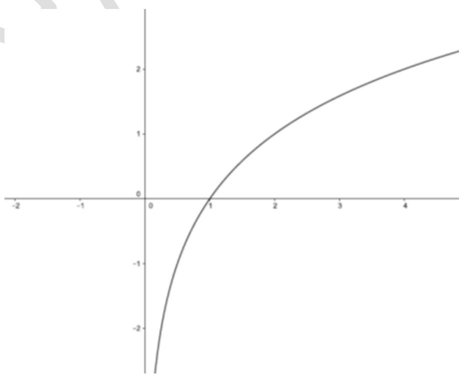
E) jiné řešení

max. 4 body

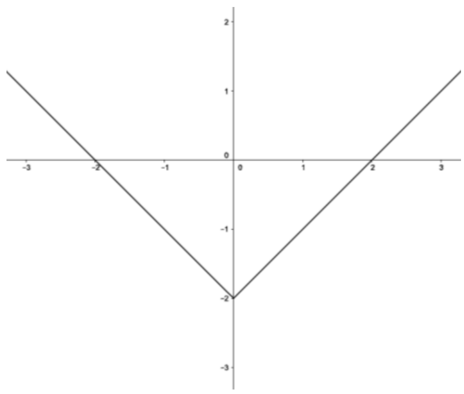
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Přiřaďte grafy funkcí (5.1-5.4) k zadaným předpisům funkcí (f_1-f_8).

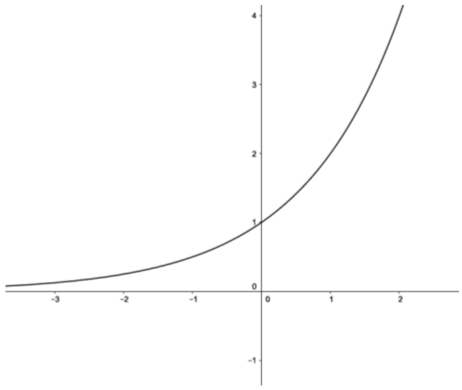
5.1



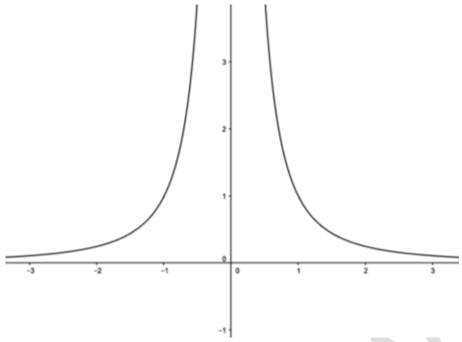
5.2



5.3



5.4



5

$f_1\colon y = 2^x$

$f_2\colon y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$f_3\colon y = x^{-2}$

$f_4\colon y = |x| - 2$

$f_5\colon y = \frac{1^x}{2}$

$f_6\colon y = \log_2 x$

$f_7\colon y = x^2 - 4$

$f_8\colon y = |2x - 2|$

5.1 f_6

5.2 f_4

5.3 f_1

5.4 f_3

Na obrázku 5.1 graf předepsané funkce prochází na ose x hodnotou 1. Ze znalosti grafu logaritmické funkce víme, že prochází právě bodem 1 na ose x. Funkce je navíc rostoucí, což znamená, že základ logaritmu musí být větší než 1. Správné řešení je f_6.

Na obrázku 5.2 jsou grafem osově souměrné přímky, tento graf má lineární funkce s absolutní hodnotou. Funkce je na ose y posunutá o 2 dílky, čemuž odpovídá předpis funkce f_4.

Na obrázku 5.3 graf funkce prochází na ose y bodem 1, tzn., že se jedná o exponenciální funkci. Tato funkce je rostoucí, takže základ musí být větší než 1. Správné řešení je f_1.

Na obrázku 5.4 je graf mocninné funkce se sudým, záporným základem. Správné řešení je f_3.

1 bod

6 V oboru R řešte:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

$$3^x + 3^x \cdot 3^1 = 108$$

$$3^x \cdot (1+3) = 108$$

$$3^x \cdot 4 = 108$$

$$3^x = \frac{108}{4}$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Na hmotný bod působí dvě síly o velikostech $\boldsymbol{F_1} = 125\ N$ a $\boldsymbol{F_2} = 75\ N$, jejichž vektory svírají úhel 60°.

7 Jak velká je výslednice vektorů sil?

$$F_1 = 125\ N$$

$$F_2 = 75\ N$$

$$\alpha = 60°$$

$$\varphi = 180° - \alpha = 120°$$

$$F = ?$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos\varphi$$

$$F^2 = 125^2 + 75^2 - 2 \cdot 125 \cdot 75 \cos 120°\ \ N$$

$$F^2 = 30625\ N$$

$$F = 175\ N$$

Správná odpověď je A.

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dán trojúhelník ABC s obsahem $S = 0{,}75\ dm^2$, stranou $a = 30\ cm$ a úhlem $\gamma = 30°$.

8 Určete velikost strany b v trojúhelníku ABC.

$$S = 75\ cm^2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin\gamma$$

$$b = \frac{2 \cdot S}{a \cdot \sin\gamma}$$

$$b = \frac{2 \cdot 75}{30 \cdot \sin 30} = 10\ cm$$

1 bod

9 V oboru C řešte:

$2 + 3i = z + |z|$

$$2 + 3i = a + bi + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} + bi = 2 + 3i$$

$$I: a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

$$II: b = 3$$

$$a + \sqrt{a^2 + 3^2} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 9} = 2 - a$$

$$a^2 + 9 = 4 - 4a + a^2$$

$$4a = -5$$

$$a = -\frac{5}{4}$$

$$z = -\frac{5}{4} + 3i$$

max. 3 body

10 Rozhodněte u příkladů (10.1-10.4), zda jsou či nejsou goniometrickým tvarem komplexního čísla.

10.1 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sin\frac{11}{6}\pi + i\cos\frac{11}{6}\pi\right)$ Ano – Ne

10.2 $z = -17 \cdot (\sin 135° + i\cos 135°)$ Ano – Ne

10.3 $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$ Ano – Ne

10.4 $z = \cos 36° - i\sin 36°$ Ano – Ne

Správný goniometrický tvar komplexního čísla vypadá: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Jestliže nějaký příklad neodpovídá tomuto předpisu, tak se nejedná o goniometrický tvar komplexního čísla.

10.1 Ne

10.2 Ne

10.3 Ano

10.4 Ne

1 bod

11 Zjednodušte výraz a výsledek zapište v goniometrickém tvaru komplexního čísla.

$(\sqrt{3} - i)^4$

Nejdříve komplexní číslo v algebraickém tvaru převedeme na goniometrický. Nejprve si vypočítáme $|z|$, kde $a = \sqrt{3}$ a $b = -1$ a dále $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hodnoty funkcí odpovídají úhlu $\frac{\pi}{6}$ a obě funkce se kladnými hodnotami shodují ve IV. kvadrantu, proto velikost úhlu bude $\frac{11\pi}{6}$. Převedený goniometrický tvar umocníme podle Moivreovy věty.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\cdot\varphi + i\sin n\cdot\varphi$$

$$(\sqrt{3}-i)^4 = \left[2\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^4 = 2^4\cdot\left(\cos\frac{4\cdot 11\pi}{6} + i\sin\frac{4\cdot 11\pi}{6}\right)$$

$$= 16\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Kulička vyrobená ze zlata má hmotnost 9,63 kg. Za normální pokojové teploty je hustota zlata přibližně 19,3 g/cm^3.

12 Určete průměr kuličky.

A) 4,9 cm

B) 6,8 cm

C) 9,8 cm

D) 10,8 cm

E) jiné řešení

$$m = 9{,}65\ kg$$

$$\rho = 19{,}3\ g/cm^3 = 19\,300\ kg/m^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{4}{24}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

$$d^3 = \frac{6V}{\pi}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{6\cdot 9{,}65}{3{,}14\cdot 19300}}\ m \doteq 0{,}098\ m \doteq 9{,}8\ cm$$

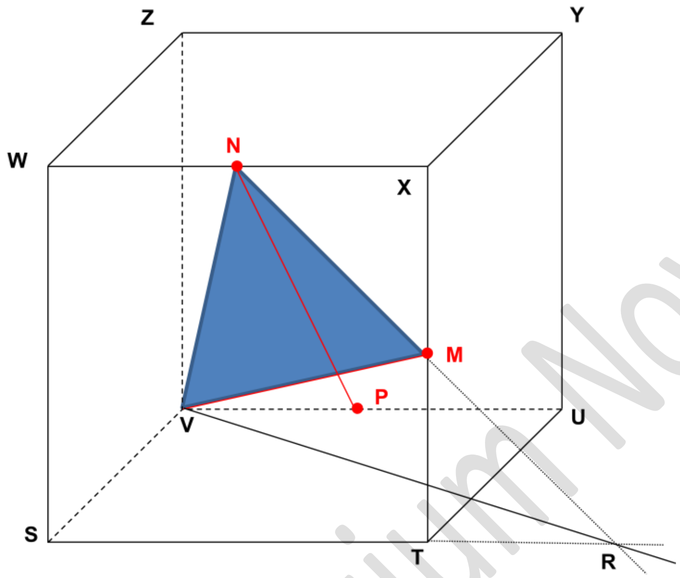
Správná odpověď je C. Kulička má přibližně průměr 9,8 cm.

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Je dána krychle $STUVWXYZ$ a body M, N, P, které jsou postupně středy hran TX, WX, UV.

13 Určete vzájemnou polohu přímek $\boldsymbol{VM}$ *a* $\boldsymbol{NP}$.



$$\overleftrightarrow{VNM}$$

$$\overleftrightarrow{VR} \in \overleftrightarrow{VNM} \cap \overleftrightarrow{STU}$$

$$P \in \overleftrightarrow{VR} \Rightarrow \overleftrightarrow{VM}\ a\ \overleftrightarrow{NP}\ jsou\ mimoběžné$$

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Je dána pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Délka jeho podstavných hran je 9 cm a výška je rovna 4,5 cm.

14 Určete odchylku rovin ABC a BCV.

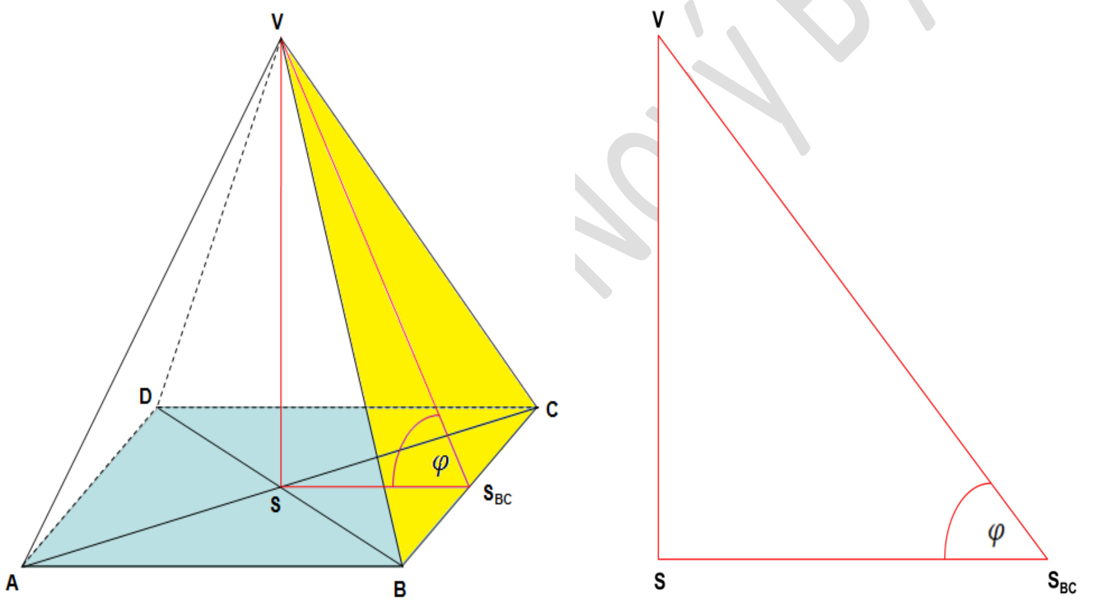
A) 25°

B) 35°

C) 45°

D) 55°

E) jiné řešení



$$v = |SV| = 4{,}5\ cm$$

$$|SS_{BC}| = \frac{a}{2} = 4{,}5\ cm$$

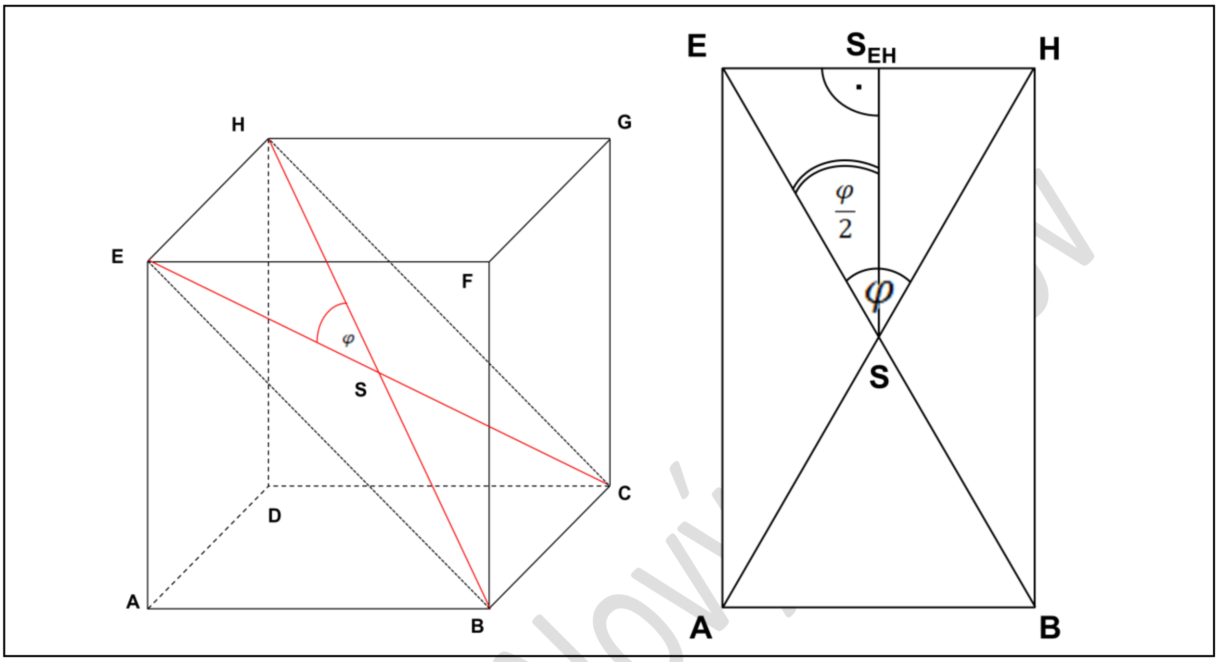
$$tan\ \varphi = \frac{|SV|}{|SS_{BC}|} = \frac{4{,}5}{4{,}5} = 1$$

$$\varphi = 45°$$

Správná odpověď je za C.

1 bod

15 Určete odchylku dvou tělesových úhlopříček krychle $ABCDEFGH$ (výsledek uveďte s přesností na vteřiny). Velikost hrany krychle je a.



$$|BH| = |CE| = \sqrt{3} \cdot a$$

$$|EH| = a$$

$$|ES| = |HS| = \frac{1}{2} \cdot |CE| = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

$$|ES_{EH}| = \frac{a}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\varphi}{2} \doteq 35° \, 15' \, 51''$$

$$\varphi \doteq 70° \, 31' \, 42''$$

KONEC

Klíč vzorového testu pro druhý ročník

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1	$x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi = 120° + k \cdot 360°$ $x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi = 240° + k \cdot 360°$	**max. 3 body**
2	$k = 0: z_0 = \sqrt[3]{\frac{24}{7}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $k = 1: z_1 = \sqrt[3]{\frac{24}{7}} \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$ $k = 2: z_2 = \sqrt[3]{\frac{24}{7}} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$	**max. 3 body**
3	Graf viz autorské řešení $R_x[3; 0]$ $R_y[0; -1]$	**max. 3 body**
4	C	**1 bod**
5		**max. 4 body** 4 podúlohy 4 b. 3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 2 b. 1 podúloha 1 b. 0 podúloh 0 b.
5.1	f_6	
5.2	f_4	
5.3	f_1	
5.4	f_3	
6	3	**1 bod**
7	A	**2 body**
8	10 cm	**1 bod**
9	$z = -\frac{5}{4} + 3i$	**1 bod**
10		**max. 3 body** 4 podúlohy 3 b. 3 podúlohy 2 b. 2 podúlohy 1b. 1 podúloha 0 b.
10.1	Ne	
10.2	Ne	
10.3	Ano	
10.4	Ne	

11	$16 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	**1 bod**
12	C	**2 body**
13	Mimoběžné	**1 bod**
14	C	**2 body**
15	$\varphi \doteq 70°\,31'\,42''$	**1 bod**
CELKEM		**30 bodů**

Hodnocení:

Počet bodů	Známka
26 – 30	**1**
21 – 25	**2**
15 – 20	**3**
10 – 14	**4**
9 – 0	**5**