VZOROVÝ TEST PRO 3. ROČNÍK (3. A, 5. C)

max. 3 body

1 **Zjistěte, zda vektor *u* je lineární kombinací vektorů *a*, *b*, je-li**
$\boldsymbol{u} = (-8; 4; 3), \boldsymbol{a} = (-1; 2; 3), b = (2; 0; 1)$. Pokud ano, zapište tuto lineární kombinaci.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

---

max. 3 body

2 **Řešte v N rovnici:** $\binom{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x-3}} + \binom{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x-4}} = \mathbf{9}$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

max. 3 body

3 Popište vlastnosti a znázorněte graficky útvar určený rovnicí:

$16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

2 body

4 Odchylka přímek p: $2x - y + 7 = 0$, q: $3x + y - 1 = 0$ je

A) $30°$

B) $45°$

C) $60°$

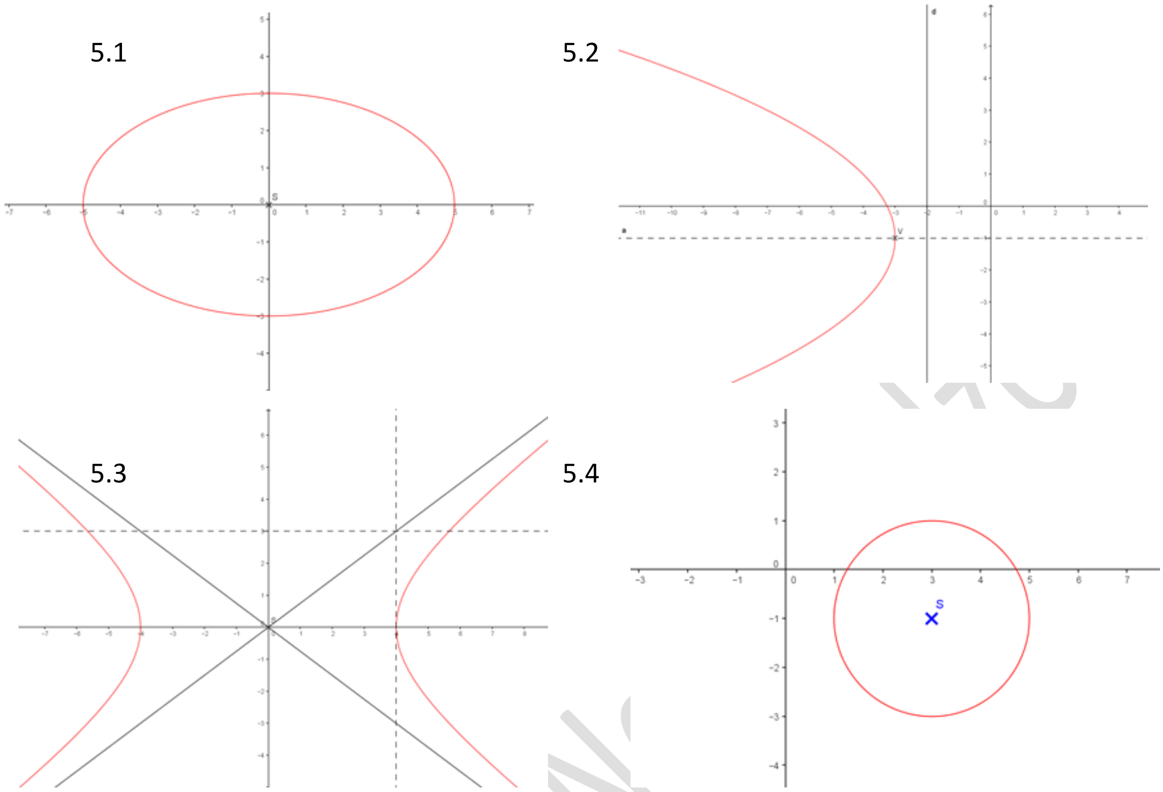
D) $135°$

E) jiné řešení

max. 4 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Přiřaďte grafy křivek (5.1-5.4) k zadaným předpisům obecných rovnic ($r_1 - r_8$).



5

$r_1: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

$r_2: 25x^2 + 9y^2 = 225$

$r_3: (x+3)^2 = 4(y+1)$

$r_4: 9x^2 - 16y^2 = 144$

$r_5: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$

$r_6: (y+1)^2 = -4(x+3)$

$r_7: 16x^2 - 9y^2 = 144$

$r_8: 9x^2 + 25y^2 = 225$

5.1 ______

5.2 ______

5.3 ______

5.4 ______

1 bod

6 Určete chybějící souřadnici vektoru *u* tak, aby byl kolmý k vektoru *v*:

$u = (-3; u_2), v = (4;\ -6)$

---

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Přímka p je dána obecnou rovnicí $3x + y - 1 = 0$.

7 Jaké je parametrické vyjádření přímky *p*?

A) $x = -1 + t, y = 2 - 3t$

B) $x = 1 + t, y = 2 - 3t$

C) $x = 1 - t, y = -2 + 3t$

D) $x = -1 - t, y = -2 - 3t$

E) jiné řešení

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dána přímka p: $2x - y + 5 = 0$ a bod $A[1;\ -1]$.

8 Určete obecnou rovnici přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem A.

---

1 bod

9 Vypočítejte vzdálenost bodu $M[2;\ -1]$ od přímky p: $3x + 4y - 12 = 0$.

---

max. 3 body

10 Rozhodněte u příkladů (10.1-10.4), zda platí následující tvrzení.

10.1 $\boldsymbol{u} = (\sqrt{2}; -4), \boldsymbol{v} = (-2\sqrt{2};\ -1), \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ Ano – Ne

10.2 Poloměr kružnice $x^2 + y^2 = 4$ je 4. Ano – Ne

10.3 Normálový vektor přímky $y = 2x - 3$ je $\boldsymbol{n}(-2; 1)$. Ano – Ne

10.4 Vrchol paraboly $x^2 - 8x + 16 = 2(y + 7)$ je $V[4; -7]$ Ano – Ne

1 bod

11 Napište rovnici tečny ke křivce k: $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ v bodě $T[3; 3]$.

---

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Elipsa je dána rovnicí $25(x + 2)^2 + 9y^2 = 225$.

12 Určete souřadnice ohnisek elipsy.

A) $F[-2; 4], G[-2; -4]$

B) $F[-2; 5], G[-2; -5]$

C) $F[-5; 0], G[1; 0]$

D) $F[-6; 0], G[2; 0]$

E) jiné řešení

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Je dána rovina $\rho: x - y + 2z - 1 = 0$ a rovina $\sigma: 2x + y + z + 7 = 0$.

13 Určete odchylku rovin ρ a σ.

---

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Jsou dány body $A[8; 1], B[6; 5]$.

14 Určete směrnici přímky *AB*.

A) $k = -\frac{1}{2}$

B) $k = 2$

C) $k = \frac{1}{2}$

D) $k = -2$

E) jiné řešení

1 bod

15 Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se žádná číslice neopakuje?

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDLI VŠECHNY ODPOVĚDI.

Autorské řešení vzorového testu pro 3. ročník

max. 3 body

1 Zjistěte, zda vektor *w* je lineární kombinací vektorů *u, v,* je-li $\boldsymbol{w} = (-8; 4; 3), \boldsymbol{u} = (-1; 2; 3), \boldsymbol{v} = (2; 0; 1)$. Pokud ano, zapište tuto lineární kombinaci.

Je-li vektor $\boldsymbol{w}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$**,** $\boldsymbol{v}$ musí platit: $\boldsymbol{w} = a\,\boldsymbol{u} + b\,\boldsymbol{v}$**,** kde a, b jsou nějaká reálná čísla. Předchozí vztah rozepíšeme pro jednotlivé souřadnice $x, y\ a\ z$:

$$-8 = -a + 2b$$
$$4 = 2a + 0b$$
$$3 = 3a + b$$

Získali jsme tři rovnice o dvou neznámých. Zvolíme libovolné dvě rovnice, vypočítáme hodnoty a, b a dosadíme je do rovnice, kterou jsme ještě nepoužili. Platí-li po dosazení hodnot za a a b rovnost levé a pravé strany, je vektor ***w*** lineární kombinací vektorů ***u*** a ***v***, nebo také lze říci, že vektory ***u*, *v*, *w*** jsou **lineárně závislé**.

V našem případě může přímo ze druhé rovnice určit hodnotu $a = 2$, a po dosazení do třetí rovnice určíme $b = -3$. Obě hodnoty dosadíme do první rovnice a vidíme, že platí rovnost $-8 = -2 + 2 \cdot (-3) = -8$. Vektor $\boldsymbol{w}$ můžeme tedy zapsat jako následující lineární kombinaci vektorů u a v: $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$**.**

2 Řešte v N rovnici: $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4}=9$ **max. 3b**

Jedná se o rovnici s kombinačními čísly. Základní vzorec je

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Podle tohoto vzorce přepíšeme předchozí kombinační výrazy na levé straně rovnice:

$$\binom{x-1}{x-3}=\frac{(x-1)!}{\big(x-1-(x-3)\big)!\,(x-3)!}=\frac{(x-1)!}{(x-1-x+3)!\,(x-3)!}=\frac{(x-1)!}{2!\,(x-3)!}$$

Získaný výsledek rozepíšeme do součinového tvaru a zkrátíme:

$$\frac{(x-1)!}{2!\,(x-3)!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ldots}{2\,(x-3)(x-4)\ldots}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Podobně upravíme druhý kombinační výraz

$$\binom{x-2}{x-4}=\frac{(x-2)!}{2!\,(x-4)!}=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

Původní rovnici tedy přepíšeme na:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}=9$$

Tuto rovnici již řešíme klasickým způsobem:

$$x^2-3x+2+x^2-5x+6=18$$

$$2x^2-8x-10=0$$
$$x^2-4x-5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$
$$\underline{\underline{x_1=5}}$$
$$x_2=-1$$

Druhý kořen (-1) nevyhovuje, nejedná se o přirozené číslo. Jediným řešením rovnice tak zůstává číslo 5, tedy:

$$\boldsymbol{K}=\{\mathbf{5}\}$$

max. 3 body

3 Popište vlastnosti a znázorněte graficky útvar určený rovnicí:

$16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$

Z různých hodnot koeficientů u x^2 a y^2 které jsou navíc obě kladné, lze usuzovat, že se jedná o elipsu. Tuto hypotézu ověříme **převedením na středový tvar metodou doplnění na čtverec**.

$$16x^2 - 64x + 25y^2 + 150y = 111$$

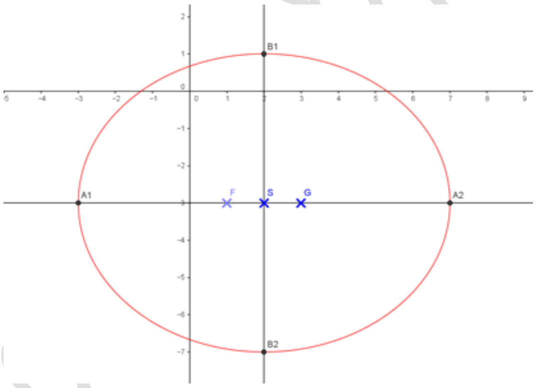
$$16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 6y) = 111$$

$$16(x-2)^2 - 64 + 25(y+3)^2 - 225 = 111$$

$$16(x-2)^2 + 25(y+3)^2 = 400$$

$$\frac{16(x-2)^2}{400} + \frac{25(y+3)^2}{400} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$



Z předchozího tvaru určíme základní parametry elipsy:

střed: $S[2; -3]$, hlavní poloosa $a = \sqrt{25} = 5$, vedlejší poloosa $b = \sqrt{16} = 4$

excentricita: $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x

Známe-li excentricitu, může dopočítat s pomocí bodu S souřadnice ohnisek:

$$F[-1; -3], G[5; -3]$$

(y-ové souřadnice jsou stejné jako u středu S, x-ové vypočítáme tak, že k x-ové souřadnici bodu S přičteme a odečteme hodnotu excentricity $e = 3$)

Hlavní vrcholy jsou $A_1[-3; -3], A_2[7; -3]$, výpočet souřadnic provedeme podobně jako u ohnisek, jen místo hodnoty $e = 3$ použijeme hodnotu $a = 5$

Vedlejší vrcholy jsou $B_1[2; 1], B_2[2; -7]$, zde jsou x-ové souřadnice stejné jako má bod S a y-ové vypočítáme přičtením a odečtením hodnoty $b = 4$.

2 body

4 Odchylka přímek $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{2x - y + 7 = 0}$, $\boldsymbol{q}$: $\boldsymbol{3x + y - 1 = 0}$ je

Odchylka přímek je stejná jako odchylka jejich normálových vektorů. Určíme tedy nejprve normálové vektory obou přímek a pak podle příslušného vzorce vypočítáme úhel, který svírají. Připomeňme, že u přímek se vždy jedná o úhel z intervalu $\langle 0°; 90° \rangle$.

Normálový vektor přímky p je $\boldsymbol{n_p} = (2; -1)$, jeho velikost je $|\boldsymbol{n_p}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Normálový vektor přímky q je $\boldsymbol{n_q} = (3; 1)$, jeho velikost je $|\boldsymbol{n_q}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Úhel obou vektorů je dán vztahem

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n_p} \cdot \boldsymbol{n_q}|}{|\boldsymbol{n_p}||\boldsymbol{n_q}|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

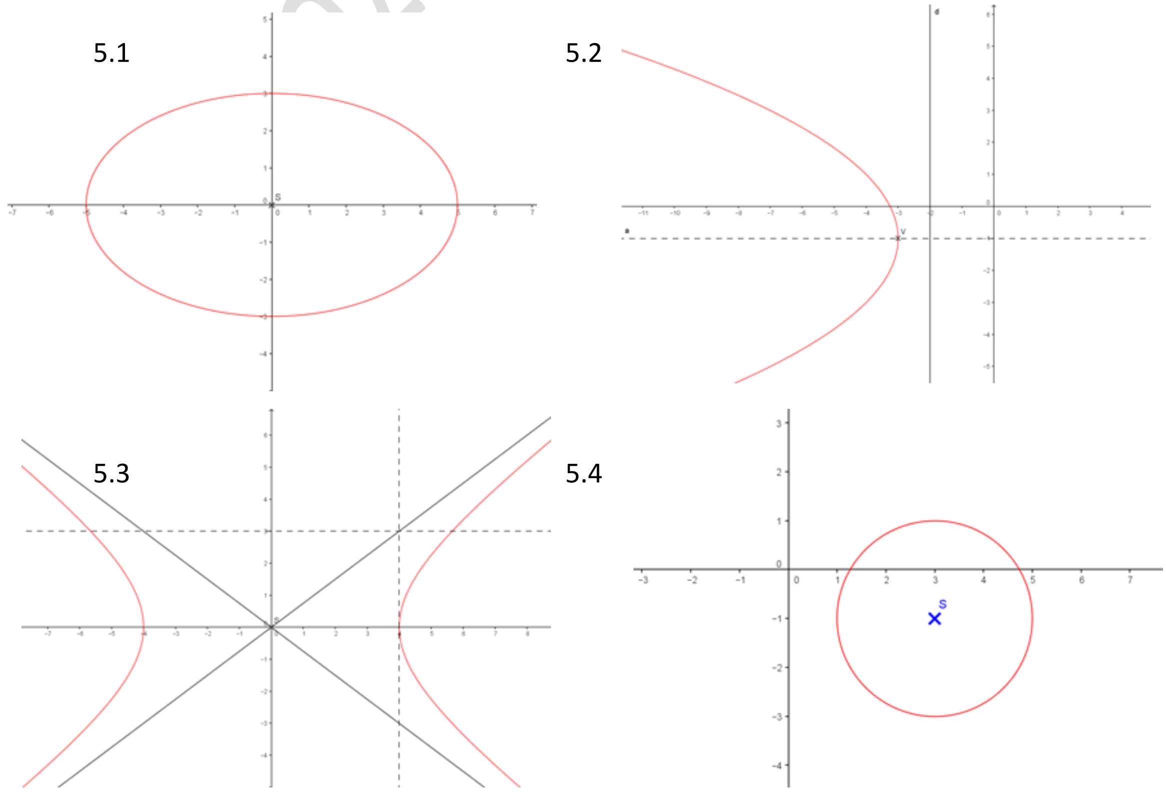
$$\varphi = 45°$$

Správná odpověď je tedy B.

max. 4 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Přiřaďte grafy křivek (5.1-5.4) k zadaným předpisům obecných rovnic ($r_1 - r_8$).



Z obrázků 5.1 až 5.4 plyne, že na obrázku 5.1 je elipsa, na obrázku 5.2 je parabola, na obrázku 5.3 je hyperbola a na obrázku 5.4 je kružnice.

Můžeme začít od nejjednodušší kuželosečky, kterou je kružnice. Z obrázku plyne, že její střed má souřadnice $S[3;-1]$ a poloměr 2. Z nabídky odpovědí lze za rovnice kružnice identifikovat r_1a r_5. Střed kružnice r_5 je ale v bodě $S[-3;1]$ a poloměr je navíc $\sqrt{2}$. **Správné řešení pro 5.4 je tedy $\boldsymbol{r_1}$.**

Druhou nejjednodušší křivkou je elipsa. Z nabídky odpovědí se jedná o r_2a r_8, což poznáme z toho, že v obecné rovnici jsou u x^2 a y^2 různá čísla ale obě kladná (nebo záporná). Z obrázku 5.1 vyčteme souřadnice středu $S[0;0]$, což nám k ničemu není a velikosti hlavní poloosy $a=5$ (vzdálenost středu od levého nebo pravého kraje elipsy) a vedlejší poloosy$b=4$ (vzdálenost středu od horního nebo dolního kraje elipsy), což je pro nás důležitá informace. Rovnice r_2a r_8 musíme ale nejprve upravit tak, aby na pravé straně byla 1, čili u obou rovnic provedeme vydělení číslem 225:

$$r_2\colon \frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1, \qquad \text{po zkrácení } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$r_8\colon \frac{9x^2}{225}+\frac{225y^2}{225}=1, \qquad \text{po zkrácení } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Křivka $r_2$má hlavní poloosu o velikosti 3, což odporuje obrázku 5.1.

Křivka $r_8$má hlavní poloosu 5, vedlejší 3, což odpovídá situaci 5.1.

Správné řešení pro 5.1 je tedy $\boldsymbol{r_8}$.

Obrázek 5.2 představuje parabolu s vrcholem $V[-3;-1]$, s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a otevřenou doleva. Jde tedy o typ $(y-n)^2=-2p(x-m)$. Tomu odpovídá pouze jediná odpověď, a to křivka r_6.

Správné řešení pro 5.2 je tedy $\boldsymbol{r_6}$.

Pro hyperbolu na obrázku 5.3 zbývají křivky r_4a r_7, které podobně jako u elipsy upravíme na středový tvar:

$$r_4\colon \frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1, \qquad \text{po zkrácení } \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

$$r_7\colon \frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1, \qquad \text{po zkrácení } \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

Z obrázku plyne, že velikost hlavní poloosy je $a=4$, čemuž odpovídá pouze r_4.

Správné řešení pro 5.3 je tedy $\boldsymbol{r_4}$.

5

$r_1: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ 5.1 r_8

$r_2: 25x^2 + 9y^2 = 225$ 5.2 r_6

$r_3: (x+3)^2 = 4(y+1)$ 5.3 r_4

$r_4: 9x^2 - 16y^2 = 144$ 5.4 r_1

$r_5: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$

$r_6: (y+1)^2 = -4(x+3)$

$r_7: 16x^2 - 9y^2 = 144$

$r_8: 9x^2 + 25y^2 = 225$

---

1 bod

6 Určete chybějící souřadnici vektoru *u* tak, aby byl kolmý k vektoru *v*:

$$u = (-3; u_2), v = (4;\ -6)$$

Pro dva kolmé vektory platí, že jejich skalární součin je roven nule.

Takže obecně musí platit: $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$,

a konkrétně

$$(-3) \cdot 4 + u_2 \cdot (-6) = 0$$

$$-12 - 6u_2 = 0$$

$$6u_2 = -12$$

$$u_2 = -2$$

Vektor ***u*** má tedy souřadnice $\boldsymbol{u} = (-3; -2)$.

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Přímka p je dána obecnou rovnicí $3x + y - 1 = 0$.

7 Jaké je parametrické vyjádření přímky *p*?

A) $x = -1 + t, y = 2 - 3t$

B) $x = 1 + t, y = 2 - 3t$

C) $x = 1 - t, y = -2 + 3t$

D) $x = -1 - t, y = -2 - 3t$

E) jiné řešení

Jednotlivé nabídky odpovědí, resp. rovnice upravíme tak, aby po sečtení vymizel parametr t.

V případě A) budeme násobit první rovnici 3 a po sečtení obou rovnic dostaneme

$3x + y = -3 + 2$, což vede na obecnou rovnici $3x + y + 1 = 0$.

V případě B) budeme násobit první rovnici také 3 a po sečtení obou rovnic dostaneme

$3x + y = 3 + 2$, což vede na obecnou rovnici $3x + y - 5 = 0$.

V případě C) budeme násobit první rovnici také 3 a po sečtení obou rovnic dostaneme

$3x + y = 3 - 2$, což vede na obecnou rovnici $3x + y - 1 = 0$, která odpovídá zadané rovnici.

Správná odpověď je C.

Pro jistotu můžeme ještě dopočítat D.

V případě D) budeme násobit první rovnici -3 a po sečtení obou rovnic dostaneme

$-3x + y = 3 - 2$, což vede na obecnou rovnici $3x - y + 1 = 0$.

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dána přímka p: $2x - y + 5 = 0$ a bod $A[1;\ -1]$.

8 Určete obecnou rovnici přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem A.

Rovnoběžné přímky mají stejný normálový vektor, tzn., že čísla u *x* a *y* jsou stejná a liší se pouze posledním koeficientem (číslem, absolutním členem).

Jakoukoliv rovnoběžku k přímce *p* tedy můžeme zapsat jako:

$$2x - y + c = 0$$

Hodnotu koeficientu *c* určíme dosazením souřadnic bodu $A[1;\ -1]$ za *x* a *y*, protože pokud bod leží na přímce, musíme po dosazení jeho souřadnic do rovnice přímky dostat rovnost 0 = 0.

Pro bod *A* tedy platí:

$$2 \cdot 1 - (-1) + c = 0$$
$$2 + 1 + c = 0$$
$$c = -3$$

Obecná rovnice rovnoběžky s přímkou *p*, která prochází bodem *A* je tedy:

$$\boldsymbol{2x - y - 3 = 0}$$

1 bod

9 Vypočítejte vzdálenost bodu $M[2;\ -1]$ od přímky p: $3x + 4y - 12 = 0$.

K výpočtu vzdálenosti bodu od přímky v rovině použijeme rychlý vzorec:

$$v(M, p) = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$v(M, p) = \frac{|3 \cdot 2 + 4(-1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$v(M, p) = \frac{|-10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Vzdálenost bodu *M* od přímky *p* je rovna 2.

max. 3 body

10 Rozhodněte u příkladů (10.1-10.4), zda platí následující tvrzení.

10.1 $\boldsymbol{u} = \left(\sqrt{2}; -4\right), \boldsymbol{v} = \left(-2\sqrt{2};\ -1\right), \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ Ano – Ne

10.2 Poloměr kružnice $x^2 + y^2 = 4$ je 4. Ano – Ne

10.3 Normálový vektor přímky $y = 2x - 3$ je $\boldsymbol{n}(-2; 1)$. Ano – Ne

10.4 Vrchol paraboly $x^2 - 8x + 16 = 2(y + 7)$ je $V[4; -7]$ Ano – Ne

10.1. Kolmé vektory mají skalární součin roven nule.

$$u \cdot v = \sqrt{2} \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) + (-4) \cdot (-1) = -4 + 4 = 0$$

Vektory jsou tedy kolmé.

10.2 V rovnici kružnice je na pravé straně druhá mocnina poloměru, nikoliv poloměr, naše kružnice má tedy poloměr 2 a ne 4.

10.3 Směrnicový tvar přímky si přepíšeme na obecnou rovnici:

$$2x - y - 3 = 0$$

Normálový vektor je dán koeficienty (čísly) u *x* a *y* a jeho souřadnice jsou tedy

$n = (2; -1)$, případně lze uvažovat i vektor opačný $(-2; 1)$.

10.4. Levou stranu rovnice paraboly lze jednoduše upravit pomocí vzorce $(a - b)^2$ na $(x - 4)^2$ a rovnice paraboly má tedy vrcholový tvar $(x - 4)^2 = 2(y + 7)$. Z nulových bodů obou závorek vyčteme souřadnice vrcholu paraboly jako $V[4; -7]$.

10.1 Ano

10.2 Ne

10.3 Ano

10.4 Ano

1 bod

11 Napište rovnici tečny ke křivce $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0}$ v bodě $\boldsymbol{T[3;3]}$.

Křivku, kterou je v tomto případě kružnice, si převedeme na středový (u paraboly případně vrcholový) tvar.

$$x^2 + 2x + y^2 = 24$$
$$(x+1)^2 - 1 + y^2 = 24$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 25$$

Rovnici tečny zformulujeme s pomocí předchozího výsledku nejprve obecně:

$$(x_0+1)(x+1) + y_0 y = 25$$

Nakonec dosadíme za x_0 a y_0 hodnoty tečného bodu *T*:

$$(3+1)(x+1) + 3y = 25$$

Roznásobíme na

$$4x + 4 + 3y - 25 = 0$$

a nakonec zapíšeme obecnou rovnici tečny:

$$\boldsymbol{t: 4x + 3y - 21 = 0}$$

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Elipsa je dána rovnicí $25(x+2)^2 + 9y^2 = 225$.

12 Určete souřadnice ohnisek elipsy.

A) $F[-2;4], G[-2;-4]$

B) $F[-2;5], G[-2;-5]$

C) $F[-5;0], G[1;0]$

D) $F[-6;0], G[2;0]$

E) jiné řešení

K určení ohnisek elipsy potřebujeme znát excentricitu.

Rovnici elipsy si nejprve upravíme na středový tvar, ze kterého určíme velikosti hlavní a vedlejší poloosy:

$$25(x+2)^2 + 9y^2 = 225$$
$$\frac{25(x+2)^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = 1$$
$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Hlavní poloosa: $a = \sqrt{9} = 3$, vedlejší poloosa: $b = \sqrt{25} = 5$

Elipsa je tedy orientovaná ve směru osy *y*.

Střed elipsy je $S[-2; 0]$. Ohniska mají v tomto případě stejnou *x*-vou souřadnici jako bod *S*.

Pro určení y-ových souřadnic musíme ještě vypočítat excentricitu:

$$e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Tuto hodnotu přičteme a odečteme k *y*-ové souřadnici bodu S.

Ohniska tedy jsou:

$$F[-2; 4]$$
$$G[-2; -4].$$

Správná odpověď je tedy A.

1 bod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Je dána rovina $\rho: x - y + 2z - 1 = 0$ a rovina $\sigma: 2x + y + z + 7 = 0$.

13 Určete odchylku rovin ρ a σ.

Odchylka rovin je dána odchylkou jejich normálových vektorů.

Normálový vektor roviny ρ je $n_\rho = (1; -1; 2)$, jeho velikost je $|n_\rho| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

Normálový vektor roviny σ je $n_\rho = (2; 1; 1)$, jeho velikost je $|n_\sigma| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

Pro úhel dvou vektorů použijeme vztah:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n_p} \cdot \boldsymbol{n_q}|}{|\boldsymbol{n_p}||\boldsymbol{n_q}|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\varphi = 60°}$$

2 body

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Jsou dány body $A[8; 1], B[6; 5]$.

14 Určete směrnici přímky *AB*.

A) $k = -\frac{1}{2}$

B) $k = 2$

C) $k = \frac{1}{2}$

D) $k = -2$

E) jiné řešení

Nejprve si určíme směrový vektor přímky *AB*, tj. $\boldsymbol{u} = AB = (-2; 4)$, který v tomto případě můžeme použít i ve zkráceném tvaru $\boldsymbol{u} = (-1; 2)$

Pokud víme, že směrnici přímky můžeme vypočítat jako

$$k = \frac{u_2}{u_1},$$

můžeme vypočítat okamžitě hodnotu směrnice

$$k = \frac{4}{-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

Správná odpověď je za D.

Pokud to nevíme, vypočítáme si nejprve obecnou rovnici přímky, kterou upravíme na směrnicový tvar.

Normálový vektor k vektoru $\boldsymbol{u}$ je $n = (4; 2) = (2; 1)$.

Obecná rovnice přímky *AB* má tedy tvar

$$2x + y + c = 0$$

Hodnotu koeficientu *c* nemusíme dopočítávat, protože nám jde jen o směrnici. Předchozí rovnici tedy upravíme na tvar

$$y = -2x - c$$

Směrnice je číslo u *x*, má tedy hodnotu $k = -2$.

Správná odpověď je kupodivu opět D.

1 bod

15 Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se žádná neopakuje?

Z daných číslic vybíráme uspořádané trojice číslic. Číslo 123 je jiné než 321, proto se jedná o variace třetí třídy z pěti prvků:

$$V(3,5) = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ze zadaných číslic lze sestavit 60 různých trojciferných čísel.

KONEC

Klíč vzorového testu pro třetí ročník

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1	$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$ Vektor ***w*** je lineární kombinací vektorů ***u***, ***v***.	**max. 3 body**
2	$\boldsymbol{x = 5}$	**max. 3 body**
3	Elipsa: $e = 3$, $a = 5$, $b = 4$, střed: $S[2; -3]$ ohniska: $F[-1; -3], G[5; -3]$ hlavní vrcholy jsou $A_1[-3; -3], A_2[7; -3]$ vedlejší vrcholy jsou $B_1[2; 1], B_2[2; -7]$	**max. 3 body**
4	**B**	**1 bod**
5		**max. 4 body** 4 podúlohy 4 b. 3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 2 b. 1 podúloha 1 b. 0 podúloh 0 b.
5.1	r_8	
5.2	r_6	
5.3	r_4	
5.4	r_1	
6	$u_2 = -2$	**1 bod**
7	**C**	**2 body**
8	$\boldsymbol{2x - y - 3 = 0}$	**1 bod**
9	$v = 2$	**1 bod**
10		**max. 3 body** 4 podúlohy 3 b. 3 podúlohy 2 b. 2 podúlohy 1b. 1 podúloha 0 b.
10.1	Ano	
10.2	Ne	
10.3	Ano	
10.4	Ano	
11	$\boldsymbol{t: 4x + 3y - 21 = 0}$	**1 bod**
12	**A**	**2 body**
13	$\boldsymbol{\varphi = 60°}$	**1 bod**
14	**D**	**2 body**
15	**60**	**1 bod**
CELKEM		**30 bodů**

Hodnocení:

Počet bodů	Známka
26 – 30	1
21 – 25	2
15 – 20	3
10 – 14	4
9 – 0	5