[a) $z_1 = 0{,}951\,1 + 0{,}309\,0\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = -0{,}951\,1 + 0{,}309\,0\mathrm{i}$, $z_4 = -0{,}587\,8 - 0{,}809\,0\mathrm{i}$, $z_5 = 0{,}587\,8 - 0{,}809\,0\mathrm{i}$;
b) $z_1 = 0{,}212\,7 + 1{,}069\,6\mathrm{i}$, $z_2 = -1{,}069\,6 + 0{,}212\,7\mathrm{i}$, $z_3 = -0{,}212\,7 - 1{,}069\,6\mathrm{i}$, $z_4 = 1{,}069\,6 - 0{,}212\,7\mathrm{i}$;
c) $z_1 = 1{,}049\,4 + 0{,}467\,2\mathrm{i}$, $z_2 = -0{,}120\,1 + 1{,}142\,4\mathrm{i}$, $z_3 = -1{,}123\,6 + 0{,}238\,8\mathrm{i}$, $z_4 = -0{,}574\,3 - 0{,}994\,8\mathrm{i}$, $z_5 = 0{,}768\,6 - 0{,}853\,6\mathrm{i}$;
d) $z_1 = 0{,}321\,8 + 0{,}776\,9\mathrm{i}$, $z_2 = -0{,}776\,9 + 0{,}321\,8\mathrm{i}$, $z_3 = -0{,}321\,8 - 0{,}776\,9\mathrm{i}$, $z_4 = 0{,}776\,9 - 0{,}321\,8\mathrm{i}$.]

1.69 V množině $\mathbb{C}$ vypočítejte binomickou rovnici. Reálnou i imaginární část kořenů zaokrouhlete na 4 desetinná místa.

a) $x^3 + \mathrm{i} = 0$, b) $x^4 + 2 - 2\mathrm{i} = 0$,

c) $x^5 - \sqrt{3} - \mathrm{i} = 0$, d) $x^6 - \dfrac{6\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} = 0$.

[a) $x_1 = 0{,}866\,0 - 0{,}5\mathrm{i}$, $x_2 = -0{,}866\,0 - 0{,}5\mathrm{i}$, $x_3 = \mathrm{i}$;
b) $x_1 = 1{,}078\,3 + 0{,}720\,5\mathrm{i}$, $x_2 = -0{,}720\,5 + 1{,}078\,3\mathrm{i}$, $x_3 = -1{,}078\,3 - 0{,}720\,5\mathrm{i}$, $x_4 = 0{,}720\,5 - 1{,}078\,3\mathrm{i}$;
c) $x_1 = 1{,}142\,4 + 0{,}120\,1\mathrm{i}$, $x_2 = 0{,}238\,8 + 1{,}123\,6\mathrm{i}$, $x_3 = -0{,}994\,8 + 0{,}574\,3\mathrm{i}$, $x_4 = -0{,}853\,6 - 0{,}768\,6\mathrm{i}$, $x_5 = 0{,}467\,2 - 1{,}049\,4\mathrm{i}$;
d) $x_1 = 1{,}088\,4 + 0{,}507\,5\mathrm{i}$, $x_2 = 0{,}104\,7 + 1{,}196\,4\mathrm{i}$, $x_3 = -0{,}983\,7 + 0{,}688\,8\mathrm{i}$, $x_4 = -1{,}088\,4 - 0{,}507\,5\mathrm{i}$, $x_5 = -0{,}104\,7 - 1{,}196\,4\mathrm{i}$, $x_6 = 0{,}983\,7 - 0{,}688\,8\mathrm{i}$.]

2 Kombinatorika

2.1 Kombinatorické pravidlo součinu

Věta 2.1 **(Kombinatorické pravidlo součinu)**
Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat právě n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu právě n_2 způsoby atd., až k-tý člen po výběru $(k-1)$-ho členu právě n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklad 2.1 Určeme počet všech čtyřciferných přirozených čísel utvořených z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení. Tato čtyřciferná čísla lze považovat za uspořádané čtveřice. První člen lze vybrat šesti způsoby. Po výběru prvního členu máme pro druhý člen 5 možností, pro třetí člen 4 možnosti a pro čtvrtý člen nám zbývají 3 možnosti.
Existuje tedy právě $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ čtyřciferných přirozených čísel požadované vlastnosti.

Cvičení

2.2 Je dán obdélník $ABCD$ a na každé jeho straně je zvoleno 6 vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy E, F, G leží v daných bodech a na různých stranách obdélníku $ABCD$.

[Trojúhelníků dané vlastnosti je 864.]

2.3 Je dán pětiúhelník $ABCDE$ a na každé jeho straně je zvoleno 5 vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy X, Y, Z leží v daných bodech a na různých stranách pětiúhelníku $ABCDE$.

[Trojúhelníků dané vlastnosti je 1 250.]

2.4 Z města A do města B vedou čtyři cesty, z města B do města C pět cest. Určete počet cest, které vedou z města A do města C přes město B.

[Z města A do města C přes město B vede 20 cest.]

2.5 Telefonní spojení mezi velitelskými stanovišti S_1 a S_2 se uskutečňuje přes stanoviště A. Stanoviště S_1 je spojeno se stanovištěm A čtyřmi telefonními linkami a stanoviště A se stanovištěm S_2 třemi vysílačkami. Určete počet možných spojení stanovišť S_1 a S_2 přes stanoviště A.

[Spojení lze uskutečnit 12 způsoby.]

2.6 Určete počet všech trojciferných přirozených čísel utvořených z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

[Existuje 100 trojciferných přirozených čísel dané vlastnosti.]

2.7 Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

[Existuje 4 536 čtyřciferných přirozených čísel dané vlastnosti.]

2.8 Při vstupu do nemocnice je v koši 6 kusů přezůvek pravých hnědých, 5 kusů levých černých téže velikosti. Kolika možnými způsoby lze vytvořit pár, který bude obsahovat jednu černou a jednu hnědou přezůvku?

[30 způsoby.]

2.9 Máme k dispozici 12 karafiátů, 10 žlutých a 11 červených tulipánů. Kolika možnými způsoby lze udělat kytičku, která bude obsahovat jeden karafiát, jeden červený a jeden žlutý tulipán?

[Kytičku požadovaných vlastností lze udělat 1 320 způsoby.]

2.10 V míse je 8 pomerančů, 12 banánů a 6 jablek. Karel si má vybrat dva druhy ovoce po jednom kuse, tak aby Blanka, která si po něm vybere jeden pomeranč, jeden banán a jedno jablko, měla co největší možnost výběru. Určete, co si Karel vybere.

[Karel si vybere pomeranč a banán. Blanka pak má 462 možností výběru.]

2.11 V hřebčíně mají 10 bílých a 8 černých závodních koní stejné výkonnosti. Na závody mají vybrat dvojice, kde bude jeden černý a jeden bílý kůň. Kolika možnými způsoby mohou provést výběr?

[Výběr mohou provést 80 způsoby.]

2.12 Jak dlouho by trvala všechna možná rozmístění 11 osob u stolu s 11 židlemi, když jedna změna míst u stolu trvá jednu vteřinu.

[1 rok 97 dnů.]

2.2 Variace a variace s opakováním

Definice. Nechť $k, n \in \mathsf{N}$, $1 \leqq k \leqq n$. **Variace** k-té třídy z n prvků je každá uspořádaná k-prvková skupina sestavená pouze z těchto n prvků tak, že každý je v ní obsažen nejvýše jednou.

Variace k-té třídy z n prvků označujeme $V_k(n)$.

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Tento vzorec se zapisuje častěji ve tvaru

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

kde $n!$ čteme n faktoriál.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n,$$

pro každé $n \in \mathsf{N}$. Pro $n = 0$ definujeme $0! = 1$.

Příklad 2.13 Kolik trikolor je možno sestavit z těchto barev: bílá, červená, modrá, zelená? V každé trikoloře se může každá barva vyskytovat jen jednou.

Řešení. Jde o skupiny tvořené třemi ze čtyř prvků, přičemž záleží na pořadí prvků ve skupině, tj. jde o variace třetí třídy ze 4 prvků. Takových skupin je $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Je tedy možno sestavit 24 různých trikolor.

Příklad 2.14 Ve škole se učí 10 různým předmětům a každému se učí nejvýše hodinu denně. Kolika způsoby je možno sestavit rozvrh hodin na jeden den, je-li v témže dni 5 různých předmětů?

Řešení. Jde o skupiny tvořené pěti prvky z deseti prvků, přičemž záleží na pořadí prvků ve skupině, tj. jde o variace páté třídy z 10 prvků.

$$V_5(10) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$$
$$= 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 30\,240.$$

Rozvrh hodin na jeden den je možno sestavit 30 240 způsoby.

Příklad 2.15 Kolik různých výsledků může mít hokejový zápas, jestliže obě mužstva nastřílejí nejvýše po třech gólech, přičemž hosté dostanou aspoň jeden gól a remíza nastane pouze v případě, že obě mužstva střelí právě tři góly?

Řešení. Počet všech možných výsledků, při kterých se zápas nekončí remízou, se rovná počtu variací druhé třídy ze čtyř prvků 0, 1, 2, 3 bez opakování, tj.:

$$V_2(4) = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Z toho počtu musíme vyloučit ty zápasy, v kterých hosté nedostanou žádný gól, tj. výsledky $0 : Z$, $Z = 1, 2, 3$, a připočítat jeden výsledek, kdy zápas skončí nerozhodně 3 : 3.
Celkový počet výsledků $n = V_2(4) - V_1(3) + 1 = 12 - 3 + 1 = 10.$

Příklad 2.16 Zjednodušme výraz $\dfrac{(n+2)!}{n!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!}$, kde $n \in \mathsf{N}$.

Řešení. Protože pro každé $n \in \mathsf{N}$ platí

$$(n+2)! = (n+1)!\,(n+2),$$
$$(n+1)! = n!\,(n+1),$$

dostáváme
$$\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n+1)(n+2)}{n!} - 2\cdot\frac{(n-1)!\,n(n+1)}{(n-1)!} + \frac{(n-2)!\,(n-1)\cdot n}{(n-2)!} =$$
$$= (n+1)(n+2) - 2n(n+1) + (n-1)n =$$
$$= n^2 + 3n + 2 - 2n^2 - 2n + n^2 - n = 2.$$

Cvičení

2.17 Utvořte všechny variace třetí třídy bez opakování ze čtyř prvků a, b, c, d.

[a, b, c; a, b, d; a, c, d; a, d, b; a, d, c; a, c, b; b, c, d; b, c, a; b, a, c; b, a, d; b, d, a; b, d, c; c, d, a; c, d, b; c, a, b; c, b, d; c, a, d; c, b, a; d, a, b; d, a, c; d, b, c; d, b, a; d, c, a; d, c, b. Variací třetí třídy bez opakování ze čtyř prvků je $V_3(4) = 24$.]

2.18 Určete počet prvků, je-li počet variací čtvrté třídy bez opakování dvacetkrát větší než počet variací druhé třídy bez opakování.

[$n = 7$]

2.19 Z kolika různých prvků lze vytvořit 13 800 variací třetí třídy?

[$n = 25$]

2.20 Zvětšíme-li počet prvků o jeden, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování o 16. Určete původní počet prvků.

[$n = 8$]

2.21 Kolik uspořádaných čtveřic lze utvořit z osmi různých prvků, jestliže se v nich žádný prvek neopakuje?

[$V_4(8) = 1\,680$]

2.22 Kolik různých přirozených čtyřciferných čísel je možno sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se žádná číslice neopakuje?

[120]

2.23 Kolika způsoby může být odměněno 1., 2., 3. cenou 13 účastníků sportovní soutěže?

[1 716]

2.24 Kolik různých prvků dá 22 350 variací druhé třídy bez opakování?

[$n = 150$]

2.25 Kolik máme dáno prvků, jestliže variací třetí třídy bez opakování z nich utvořených je desetkrát více než variací druhé třídy?

[$n = 12$]

2.26 Kolik můžeme sestavit sedmiciferných čísel tak, aby se každé číslo skládalo z různých číslic 0, 1, 2, 3, ..., 7, 8, 9?

[$V_7(10) - V_6(9) = 544\,320$]

***2.27** Dokažte, že pro počet variací bez opakování platí rekurentní vzorce:

a) $V_k(n) = n \cdot V_{k-1}(n-1)$,

b) $V_k(n+1) = V_k(n) + k \cdot V_{k-1}(n)$.

Návod: a) Počítejte, kolik variací má určitý pevně zvolený prvek na prvém místě; b) počítejte, oč se zvětší počet variací, přidáme-li k n prvkům ještě další prvek.

2.28 Dokažte, že:

a) $n \cdot n! + (n-1)! = (n^2+1)(n-1)!$,

b) $n! + n^2(n-1)! = (n+1)!$,

c) $(n+1)! - n! = n \cdot n!$.

2.29 Vypočítejte:

a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$, b) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

[a) $\dfrac{n}{(n+1)!}$, $n \in \mathsf{N}$; b) $\dfrac{n+2}{(n+1)!}$, $n \in \mathsf{N}$.]

2.30 Vypočítejte:

a) $\dfrac{12!}{3!\,4!\,5!\,6!}$, b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$, c) $\dfrac{(n-4)!}{(n-1)!}$.

[a) 38,5; b) $(n+2)(n+1)n = n^3 + 3n^2 + 2n$, $n \in \mathsf{N}$; c) $\dfrac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)} = \dfrac{1}{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}$, $n \in \mathsf{N}$, $n \geqq 4$.]

2.31 Upravte výrazy:

a) $\dfrac{n^2-9}{(n+3)!} + \dfrac{6}{(n+2)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$,

b) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{3}{(n+1)!} - \dfrac{n^2-4}{(n+2)!}$.

[a) $\dfrac{1}{(n+2)!}$, $n \in \mathsf{N}$; b) 0, $n \in \mathsf{N}$.]

2.32 Dokažte, že platí: $n \cdot n! + (n-1)! + n^2(n-1)! + (n+1)! = (3n^2+n+1)(n-1)!$, $n \in \mathsf{N}$.

2.33 Zjednodušte výraz: $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} + \dfrac{(3n+3)!}{(3n+4)!}$, $n \in \mathsf{N}$.

[$\dfrac{(n+2)^2}{n(n+1)(3n+4)}$]

2.34 Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!\,(n^2-4)}$, b) $\dfrac{4-n^2}{(n+2)!} + \dfrac{n}{(n+1)!}$.

[a) $\dfrac{n+3}{n-2}$, $n \in \mathsf{N}$, $n \neq 2$; b) $\dfrac{2}{(n+1)!}$, $n \in \mathsf{N}$.]

2.35 Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{(n-3)!\,(n^2-1)}{(n-1)!}$, b) $\dfrac{2}{(n-1)!} - \dfrac{2n^2+n}{(n+1)!}$,

c) $\dfrac{(n+1)! - n \cdot n!}{(n-1)!}$.

[a) $\dfrac{n+1}{n-2}$, $n \in \mathsf{N}$, $n \geqq 3$; b) $\dfrac{n}{(n+1)!}$, $n \in \mathsf{N}$; c) n, $n \in \mathsf{N}$.]

2.36 Řešte rovnice:

a) $\log(x+6)! - \log(x+5)! = 2\log x$,

b) $\log x! - \log(x-2)! + \log 5 = 1$,

c) $\dfrac{(x-3)! + (x-1)!}{(x-2)!} = 3$,

d) $\dfrac{(x-4)! + (x-2)!}{(x-3)!} = 3$.

[a) $x = 3$; b) $x = 2$; c) $x = 3$; d) $x = 4$.]

2.37 Sečtěte výrazy
$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}+\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}.$$

$$\left[\ \frac{5n+6}{2n(n+1)(2n+3)},\ n\in\mathsf{N}.\ \right]$$

***2.38** Kolika nulami (v desítkové soustavě) končí číslo 300! ?

Návod: Všimněte si těch činitelů, které jsou dělitelné pěti.

[Číslo 300! končí 74 nulami.]

2.39 Sečtěte výrazy
$$\frac{(n+2)!}{n!}-2\frac{(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}.$$

$$[\ 2,\ \text{pro } n\in\mathsf{N},\ n\geqq 2.\ ]$$

2.40 Dokažte, že pro každé $n\in\mathsf{N}$, platí:
$$n!+(n-1)!\,n^2=(n+1)!$$

Definice. **Variace** k-**té třídy s opakováním** z n prvků je každá uspořádaná k-prvková skupina sestavená pouze z těchto n prvků. Každé místo k-prvkové skupiny může být obsazeno n způsoby a všech k míst může být obsazeno $\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k\text{-krát}}=n^k$.

Počet variací k-té třídy s opakováním z n prvků, vypočteme podle vzorce
$$V'_k(n)=n^k.$$

Příklad 2.41 Kolik různých pěticiferných přirozených čísel lze napsat číslicemi 0, 1, 2, 4, 5, může-li se v každém čísle každá číslice libovolně opakovat?

Řešení. Mohou-li se číslice opakovat, jde o variace páté třídy z pěti prvků s opakováním, jichž je $V'_5(5)=5^5$. Přitom je třeba vyloučit ty, které začínají nulou a na jejichž dalších místech jsou čtyřciferné skupiny utvořené z číslic 0, 1, 2, 4, 5 tak, že se každá z nich může libovolně opakovat. Je tedy možno vyloučit ty, které tvoří variace čtvrté třídy z pěti prvků s opakováním v počtu $V'_4(5)=5^4$. Hledaných čísel je proto $V'_5(5)-V'_4(5)=5^5-5^4=2\,500$.

Cvičení

2.42 Napište všechny variace druhé třídy s opakováním z prvků a, b, c, d.

[a,a; a,b; a,c; a,d;
b,a; b,b; b,c; b,d;
c,a; c,b; c,c; c,d;
d,a; d,b; d,c; d,d; $V'_2(4)=16$.]

2.43 Kolik různých přirozených čísel jednociferných až čtyřciferných je možno utvořit z číslic 0, 1, 2, 3?

[Celkový počet čísel je
$V'_1(4)+\big(V'_2(4)-4\big)+\big(V'_3(4)-16\big)+\big(V'_4(4)-64\big)=255.$]

2.44 Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel sestavených pouze z číslic 2, 4, 6, 8, 9.

[$V'_4(5)=625$]

2.45 Státní poznávací značka automobilu byla tvořena třemi písmeny a čtyřmi číslicemi. První tři členy byly písmena a další čtyři číslice. Určete, kolik těchto státních poznávacích značek šlo vytvořit, když bylo k dispozici 24 písmen.

[Celkem šlo vytvořit 138 240 000 státních poznávacích značek.]

2.46 Nová telefonní ústředna má devíticiferná čísla. Určete počet všech možných devíticiferných telefonních čísel, která nezačínají nulou.

[Počet všech devíticiferných telefonních čísel je $9\cdot 10^8$.]

2.47 Kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit z číslic 4, 7?

[32]

2.48 Kolik různých trojciferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4?

[64]

2.49 Kolik různých telefonních stanic lze zapojit, jsou-li všechna telefonní čísla šesticiferná (nulu na prvním místě nepřipouštíme)?

[$V'_6(10)-V'_5(10)=900\,000$]

2.50 Řešte rovnice v oboru přirozených čísel:

a) $V_2'(x) - x \cdot V_3'(2) = 20$, b) $n \cdot V_2'(3) = 10 - V_2'(n)$,

c) $V_2'(x) - x \cdot V_2'(3) = 10$.

[a) 10; b) 1; c) 10.]

2.3 Permutace a permutace s opakováním

Definice. **Permutace** z n prvků je každá variace n-té třídy z těchto n prvků.
Počet všech permutací z n prvků označíme $P(n)$.

$$P(n) = V_n(n) = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-n+1) =$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 1, \text{ tj. } P(n) = n!$$

Příklad 2.51 Kolik různých sestav útoku může sestavit trenér fotbalového družstva z hráčů s čísly 7, 8, 9, 10, 11 tak, aby

a) hráči se sudými čísly, b) hráči s lichými čísly,

nehráli vedle sebe v útoku?

Řešení

a) Počet sestav v útoku, které jsou sestaveny z hráčů s čísly 7, 8, 9, 10, 11, je $P(5) = 5!$. Z tohoto počtu musíme odečíst počet sestav, které mají hráči se sudými čísly 8 a 10 vedle sebe. Tyto sestavy dostaneme tak, že utvoříme ze čtyř prvků x, (8, 10), y, z, resp. x, (10, 8), y, z všechny možné permutace, kde x, y, z jsou hráči s lichými čísly. Počet těchto sestav je $2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4!$. Počet sestav útoku, které nemají hráče se sudými čísly vedle sebe, je

$$P = P(5) - 2 \cdot P(4) = 5! - 2 \cdot 4! = 72.$$

b) Počet sestav útoků sestavených z hráčů s čísly 7, 8, 9, 10, 11, které nemají hráče s lichými čísly vedle sebe, určíme následující úvahou. Každá takováto sestava má tvar x, 8, y, 10, z, nebo x, 10, y, 8, z, kde x, y, z jsou hráči s lichými čísly. Proto počet těchto sestav je

$$P = 2 \cdot P(3) = 2 \cdot 3! = 12.$$

Příklad 2.52 Při tělesné výchově stojí v řadě 5 děvčat, z nichž dvě jsou sestry, které chtějí stát vedle sebe. Kolika způsoby můžeme děvčata postavit tak, aby sestry stály vedle sebe?

Řešení. Označme děvčata písmeny A, B, C, D, E. Písmena A, B značí sestry. Ukažme si některá pořadí děvčat v řadě. Například $[A, B, C, D, E]$, $[C, D, A, B, E]$ atd. Je zřejmé, že v každé takovéto permutaci se vyskytuje uspořádaná dvojice A, B, ale stejný počet permutací získáme také pro uspořádanou dvojici B, A. Výsledek proto vezmeme dvakrát. Nahradíme-li dvojici A, B jediným prvkem (označíme jej X), dostaneme ze dvou výše uvedených permutací tyto:

$$[X, C, D, E], [C, D, X, E].$$

Počet všech možných pořadí děvčat v řadě, která splňují požadovanou podmínku, je tedy roven dvojnásobnému počtu všech permutací ze čtyř prvků X, C, D, E, tj.:

$$2P(4) = 2 \cdot 4! = 48.$$

Definice. **Permutace** n prvků **s opakováním** mohou být tvořeny ze dvou skupin prvků o r a $n-r$ prvcích nebo z m skupin o k_1, k_2, ..., k_m prvcích, kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Počet všech permutací s opakováním z n prvků složených z k_1, k_2, ..., k_m skupin označíme $P'_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n)$,

$$P'_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!},$$

resp. pro dvě skupiny prvků

$$P'_{r,n-r}(n) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \quad \text{(čti: } n \text{ nad } r\text{)}.$$

Příklad 2.53 Kolik různých sedmiciferných čísel lze vytvořit z číslic 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5?

Řešení

$$P'_{3,4}(7) = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35; \quad \binom{7}{3} = 35.$$

Celkem můžeme vytvořit 35 sedmiciferných čísel.

Cvičení

2.54 Utvořte permutace bez opakování z prvků a, b, c, d.

[a, b, c, d; b, c, d, a; c, d, a, b; d, a, b, c;
a, b, d, c; b, c, a, d; c, d, b, a; d, a, c, b;
a, c, b, d; b, a, c, d; c, a, b, d; d, b, c, a;
a, d, b, c; b, a, d, c; c, a, d, b; d, b, a, c;
a, d, c, b; b, d, a, c; c, b, a, d; d, c, a, b;
a, c, d, b; b, d, c, a; c, b, d, a; d, c, b, a.
Permutací je $P(4) = 4! = 24$.]

2.55 Z kolika prvků můžeme vytvořit 40 320 permutací bez opakování?

[$n = 8$]

2.56 Ve třídě se vyučuje jedenácti předmětům. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den, připadá-li na tento den šest různých jednohodinových předmětů?

[332 640 způsoby.]

2.57 V rovině jsou dány 4 body A_1, A_2, A_3, A_4 z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Kolik různých uzavřených lomených čar lze z nich vytvořit?

[3]

2.58 Kolik jednociferných až čtyřciferných čísel s různými ciframi lze vytvořit z cifer 0, 2, 4, 6?

[49]

2.59 Osm studujících si slíbilo, že si pošlou vzájemně pohlednice z prázdninových cest. Kolik pohlednic bylo rozesláno?

[56]

2.60 Určete počet všech čtyřciferných čísel, která jsou tvořena z cifer 0, 1, 2, 5, 7 a jsou dělitelná číslem 9, přičemž cifry se mohou i opakovat.

[54]

***2.61** Kufřík má heslový zámek s pěti okruhy po osmi číslicích 1, 2, 3, ..., 8. Nastavme ho libovolným způsobem.

a) Kolika různými způsoby lze tato nastavení provést?

b) Kolik okruhů po osmi číslicích musí nejméně tento zámek mít, má-li počet všech možných případů překročit milion?

c) Kolik číslic musí nejméně mít každý z pěti okruhů, má-li počet všech možných způsobů překročit 10 000?

[a) 32 768; b) 7; c) 7.]

***2.62** Zmenší-li se počet prvků, mezi nimiž jsou dva stejné, právě o tyto dva stejné prvky, zmenší se počet permutací 45krát. Kolik je prvků?

Návod: Počet permutací s opakováním je dán vzorcem $P'_{k_1,k_2}(n) = \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!}$, kde n znamená počet prvků, z nichž jeden se opakuje k_1-krát a druhý k_2-krát.

[Prvků je 10.]

2.63 Zvětší-li se počet n prvků o dva, zvětší se počet permutací 72krát. Určete n.

[$n = 7$]

2.64 Řešte rovnici

$$\log(x+1)! - \log x! = 1.$$

[$x = 9$]

2.65 Zmenšíme-li počet prvků o dva, zmenší se počet permutací dvacetkrát. Určete původní počet prvků.

[5]

2.66 Kolik šesticiferných čísel bez opakování je možno sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, mají-li čísla

a) začínat cifrou 4,

b) začínat ciframi 4 nebo 5?

[a) 120; b) 240.]

2.67 Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací z těchto prvků vytvořených padesátšestkrát. Kolik je prvků?

[6]

2.68 Kolik čtyřciferných telefonních čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5 tak, že se v něm každá číslice vyskytuje nejvýše jednou?

[120]

2.69 Kolik různých třítónových popěvků lze vytvořit z tónů A, C, E, G, jestliže se tóny neopakují?

[24]

2.70 Aranžér má umístit do výkladu vedle sebe 3 stejné kabáty béžové, 2 stejné zelené a jeden černý. Kolika způsoby by to mohl provést?

[60]

2.71 Kolik značek Morseovy abecedy je možno utvořit, sestavíme-li tečky a čárky do skupin o 3 a 4 prvcích?

[24]

2.4 Kombinace a kombinace s opakováním

Definice. **Kombinace** k-té třídy z n prvků je každá k-prvková podmnožina množiny určené těmito n prvky.

Označujeme je $C_k(n)$.

$$C_k(n) = \binom{n}{k},$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Příklad 2.72 Je dáno n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce a žádné čtyři na kružnici. Kolik kružnic je jimi určeno a kolik jich prochází každým z daných bodů?

Řešení. Víme, že kružnice je určena třemi body, které neleží v přímce. Poněvadž žádné tři z daných bodů neleží v přímce a žádné čtyři na kružnici, je jimi určeno tolik kružnic, kolik různých trojic bodů z nich lze vybrat. Jde tedy o skupiny třetí třídy, přičemž nezáleží na pořadí

bodů v jednotlivých skupinách, tj. jde o kombinace třetí třídy z n prvků. Danými body tedy prochází celkem $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ kružnic.

Vybereme-li si libovolný z daných bodů, pak jím a libovolnými dvěma dalšími body je určena jedna kružnice. Každým z daných bodů tedy prochází tolik kružnic, kolik je možno ze zbývajících $n-1$ bodů vybrat skupin po dvou bodech, tj.

$$\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ kružnic.}$$

Úloha má smysl pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$.

Příklad 2.73 Na písemné zkoušce z matematiky je 16 žáků, z nichž čtyři jsou na zkoušku výborně připraveni. Polovina žáků má vždy stejné zadání úlohy. Kolika způsoby můžeme žáky rozdělit, aby v obou skupinách byli vždy dva výborně připravení žáci?

Řešení. Počet způsobů, kterými můžeme rozdělit čtyři výborně připravené žáky do dvou skupin po dvou žácích v každé skupině, je $C_2(4)$. Ke každé dvojici můžeme připojit 6 žáků $C_6(12)$ způsoby. Celkový počet způsobů, kterými žáky můžeme takto rozdělit, je

$$n = C_2(4) \cdot C_6(12) = \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{6} = 5\,544.$$

Použili jsme kombinatorické pravidlo součinu.

Příklad 2.74 Kolik prvků je třeba vzít, aby z nich bylo možno utvořit šestkrát více kombinací čtvrté třídy než kombinací druhé třídy?

Řešení. Počet kombinací čtvrté třídy z n prvků je dán vztahem

$$C_4(n) = \frac{n!}{4!\,(n-4)!},$$

pro kombinace druhé třídy z n prvků platí, že

$$C_2(n) = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}.$$

Ze zadání plyne, že

$$C_4(n) = 6 \cdot C_2(n),$$

tj.

$$\frac{n!}{4!\,(n-4)!} = \frac{6\cdot n!}{2!\,(n-2)!},$$

po úpravě dostaneme:

$$2!\,(n-2)! = 6\cdot 4!\,(n-4)!$$
$$n^2 - 5n - 66 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{289}}{2} = \begin{cases} 11 \\ -6 \text{ nevyhovuje} \end{cases}$$

K tomu, aby byly splněny podmínky uvedené v zadání úlohy, je třeba vzít 11 prvků.

Příklad 2.75 Kolik možných výsledků může padnout při hodu třemi hracími kostkami?

Řešení. Počet **kombinací** k-**té třídy s opakováním** z počtu n prvků je dán vztahem

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k},$$

kde ve skupině k prvků se může každý prvek libovolně opakovat. Proto platí

$$C'_3(6) = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56.$$

Počet všech možných výsledků při současném hodu třemi kostkami je 56.

Cvičení

2.76 Utvořte všechny kombinace druhé třídy z pěti prvků x, y, z, h, k.

[x, y; x, z; x, h; x, k; y, z; y, h; y, k; z, h; z, k; h, k; $C_2(5) = 10$.]

2.77 Kolik prvků je třeba vzít, aby se sedminásobný počet kombinací 2. třídy rovnal $\frac{3}{2}$ počtu kombinací 3. třídy?

[$n = 16$]

2.78 V kolika bodech se protíná 9 přímek, z nichž právě 4 jsou navzájem rovnoběžné?

[30]

2.79 V prostoru je dáno 12 bodů, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině.

a) Kolik čtyřstěnů lze z těchto bodů jako vrcholů vytvořit?

b) Kolik čtyřstěnů vytvoříme, leží-li právě 6 bodů v jedné rovině?

[a) 495; b) 480.]

2.80 V rovině je dáno 10 bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce.

a) Kolik kružnic lze jimi určit?

b) Kolik kružnic je určeno, leží-li právě 6 bodů na jedné kružnici?

[a) 120; b) 101.]

2.81 Je dáno 10 různých bodů v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině.

a) Kolik rovin lze jimi proložit?

b) Kolik rovin lze jimi proložit, leží-li 4 body v jedné rovině?

[a) 120; b) 117.]

2.82 Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 21. Kolik je dáno prvků?

[7]

2.83 Ve třídě je 18 chlapců a 14 dívek. Kolikerým způsobem se mohou zvolit do třídní samosprávy 3 zástupci, mají-li to být: a) samí chlapci, b) samé dívky, c) dva chlapci a jedna dívka?

[a) 816; b) 364; c) 2 142.]

2.84 Jestliže $\binom{15}{5} = 3\,003$, vypočítejte:

a) $\binom{15}{4}$, b) $\binom{15}{6}$, c) $\binom{15}{8}$.

[a) 1 365; b) 5 005; c) 6 435.]

2.85 Určete počet prvků n, je-li počet kombinací druhé třídy 66.

[$n = 12$]

2.86 Učitel má k dispozici 20 aritmetických a 30 geometrických příkladů. Na písemnou práci má vybrat jeden aritmetický a dva geometrické příklady. Kolik je možností na sestavení písemných prací?

[8 700]

2.87 Kolik přímek je určeno 6 body, jestliže

a) žádné tři z nich neleží na jedné přímce,

b) tři body leží na jedné přímce,

c) tři a tři body leží na přímce,

d) čtyři body leží na jedné přímce?

[a) 15 přímek; b) 13 přímek; c) 11 přímek; d) 10 přímek.]

2.88 V tanečních je 24 chlapců a 15 dívek. Kolik různých párů mohou vytvořit? Řešte užitím kombinací i užitím kombinatorického pravidla součinu.

[360]

2.89 Kolika způsoby lze vybrat ze skupiny 20 dětí dvojici na konání noční hlídky?

[190]

2.90 Z kolika prvků lze vytvořit 100 kombinací druhé třídy?

[Nelze vytvořit.]

2.91 Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno ve dvouhře celkem 21 utkání a hráči hráli každý s každým?

[7]

2.92 Ve třídě je 21 chlapců a 9 dívek. Kolikerým způsobem lze zvolit tříčlenný výbor třídní samosprávy tak, aby v něm byli 2 chlapci a 1 dívka?

[$C_2(21) \cdot C_1(9) = 1\,890$]

2.93 Hokejové družstvo má 20 hráčů; 13 útočníků, 5 obránců a 2 brankáře. Kolik různých sestav by mohl trenér vytvořit, jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře?

[$C_3(13) \cdot C_2(5) \cdot C_1(2) = 5\,720$]

2.94 V bedně je 28 výrobků 1. jakosti a 2 výrobky vadné. Kolikerým způsobem je možno vybrat pět výrobků tak, aby tři z nich byly 1. jakosti a dva z nich vadné?

[$C_3(28) \cdot C_2(2) = 3\,276$]

2.95 Zvětší-li se počet prvků o čtyři, zvětší se počet kombinací druhé třídy o třicet. Kolik je prvků?

[6]

2.96 Ve třídě je 20 dívek a 15 chlapců. Kolik různých pětičlenných družstev na sportovní závod je možno vytvořit tak, aby v družstvu byli tři dívky a dva chlapci?

[$C_3(20) \cdot C_2(15) = 119\,700$]

2.97 Jaký je počet kombinací s opakováním 2. třídy a 3. třídy z prvků a, b, c, d?

[10, 20]

2.98 Kolik možných výsledků může padnout při hodu pěti mincemi, rozlišujeme-li rub a líc mince?

[6]

2.99 V elektrodílně jsou k použití cívky, které mají elektrické odpory o velikostech 1, 2, 3, 5, 10 ohmů. Kolik různých zapojení pěti cívek v obvodu stejnosměrného proudu, při sériovém zapojení, můžeme získat?

[$C'_5(5) = 126$]

2.5 Vlastnosti kombinačních čísel a Pascalův trojúhelník

Definujme nejprve některé vlastnosti. Je-li n libovolné přirozené číslo a $k = 0$, platí:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Sestavíme-li kombinační čísla do schématu tak, aby v každém řádku byla všechna kombinační čísla pro dané n, dostaneme takzvaný Pascalův trojúhelník:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Věta 2.2 Pro všechna přirozená čísla n, k, taková, že $n \geqq k$, platí:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,

c) $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n+1}$.

Příklad 2.100 V množině všech přirozených čísel řešme rovnici

$$\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4.$$

Řešení. Pro všechna přirozená čísla $x \geqq 4$ platí, že

$$\binom{x-1}{x-2} = \frac{(x-1)!}{(x-2)!\,[(x-1)-(x-2)]!} = \frac{x-1}{1!},$$

$$\binom{x-2}{x-4} = \frac{(x-2)!}{(x-4)!\,[(x-2)-(x-4)]!} = \frac{(x-2)!}{(x-4)!\,2!} = \frac{(x-3)(x-2)}{2!}.$$

Lze také použít větu 2.2a.
Daná rovnice má tvar

$$x - 1 + \frac{(x-3)(x-2)}{2} = 4,$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Odtud $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.
Dané rovnici vyhovuje pouze kořen $x = 4$, neboť kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je definováno pro všechna $n, k \in \mathsf{N}$, $n \geqq k$.

$$L = \binom{3}{2} + \binom{2}{0} = 4, \quad P = 4,$$
$$L = P.$$

Cvičení

2.101 Vypočítejte:

a) $\binom{8}{4}$, b) $\binom{9}{3}$, c) $\dfrac{(2!)^2}{(3^2)!}$, d) $\dfrac{5!+6!}{3!}$

[a) 70; b) 84; c) $\frac{4}{9!} = 11 \cdot 10^{-6}$; d) 140.]

2.102 Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

a) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$, b) $\binom{11}{4}+\binom{11}{8}$.

[a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{12}{4}$.]

2.103 Upravte:

$$\frac{n!}{(n-3)!}+\binom{n}{2}.$$

[$\frac{n}{2}(n-1)(2n-3)$, $n \geqq 3$, $n \in \mathsf{N}$.]

2.104 Vypočítejte

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}.$$

[$\frac{1}{6}(n^3+9n^2+26n+24)$, $n \in \mathsf{N}$.]

2.105 Podle rekurentního vzorce $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \dfrac{n-k}{k+1}$, $n > k$, vypočítejte:

a) $\binom{16}{3}$, b) $\binom{18}{4}$, c) $\binom{20}{5}$.

[a) 560; b) 3 060; c) 15 504.]

2.106 Pomocí věty 2.2 zjednodušte a pak vypočítejte:

a) $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}$, b) $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}$.

[a) 35; b) 162.]

2.107 Ověřte, že součet všech kombinačních čísel v desátém řádku Pascalova trojúhelníku se rovná 2^{10}.

2.108 Vypočtěte v jedenáctém řádku součet čísel na sudých místech a na lichých místech.

[2^{10}]

2.109 Je více možností (je pravděpodobnější), že při deseti hodech stejnou mincí, padne „lev" pětkrát, nebo že padne čtyřikrát?

[Pětkrát.]

2.110 Kolik tiketů sportky musíme vyplnit, abychom měli jistotu, že vyhrajeme 1. cenu? Hádáme 6 čísel ze 49 čísel.

[13 983 816]

2.111 Zjednodušte výraz

$$\frac{n!}{(n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(n+2)!}-\frac{(n+2)!}{(n+3)!}-\frac{n!}{(n+3)!}.$$

[$-\frac{n}{(n+1)(n+3)}$, $n \in \mathsf{N}$.]

2.112 Řešte rovnice:

a) $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1} = \dfrac{x^2+1}{2}$,

b) $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4} = 9$,

c) $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2} = a^2$.

[a) $x \in \mathsf{N}$, $x \geqq 2$, nemá řešení; b) $x = 5$, $x \in \mathsf{N}$, $x \geqq 4$;
c) $x = 1 + |a|$ pro $|a| \geqq 1$; nemá řešení pro $|a| < 1$, $a \in \mathsf{Z}$.]

2.113 Řešte rovnice:

a) $\binom{x-2}{x-4}+\binom{x-3}{x-5} = 16$,

b) $C_3(x) + C_2(x) = 15(x-1)$,

c) $30x! = (x+2)!$,

2.118 a) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^6$, b) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^7$.

[a) $\frac{x^6}{64}-\frac{x^5y}{16}+\frac{5x^4y^2}{48}-\frac{5x^3y^3}{54}+\frac{5x^2y^4}{108}-\frac{xy^5}{81}+\frac{y^6}{729}$;
b) $\frac{x^7}{y^7}+7\frac{x^5}{y^5}+21\frac{x^3}{y^3}+35\frac{x}{y}+35\frac{y}{x}+21\frac{y^3}{x^3}+7\frac{y^5}{x^5}+\frac{y^7}{x^7}$.]

2.119 a) $(1+\mathrm{i})^3$, b) $(1-3\mathrm{i})^4$,
c) $(2-\mathrm{i}\sqrt{2})^7$, d) $(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6$.

[a) $-2+2\mathrm{i}$; b) $28+96\mathrm{i}$; c) $-208+344\mathrm{i}\sqrt{2}$; d) 64.]

2.120 a) $(2+3\sqrt{3})^7$, b) $\left(4x-\frac{3}{2}\right)^6$.

[a) $497\,954+289\,461\sqrt{3}$;
b) $4\,096x^6-9\,216x^5+8\,640x^4-4\,320x^3+1\,215x^2-\frac{729}{4}x+\frac{729}{64}$.]

2.121 a) $(x+a)^6$, b) $(a+\sqrt{b})^{11}$, $b\geqq 0$,
c) $(\sqrt{m}-n)^5$, $m\geqq 0$, d) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^6$, $ab>0$.

[a) $x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6$;
b) $a^{11}+11a^{10}b^{\frac{1}{2}}+55a^9b+165a^8b^{\frac{3}{2}}+330a^7b^2+462a^6b^{\frac{5}{2}}+462a^5b^3+330a^4b^{\frac{7}{2}}+165a^3b^4+55a^2b^{\frac{9}{2}}+11ab^5+b^{\frac{11}{2}}$;
c) $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}m^{\frac{5-k}{2}}(-n)^k$;
d) $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{6-k}{2}}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{2}}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{3-k}$.]

2.122 Vypočítejte $(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^5$ podle binomické věty a podle Moivreovy věty a porovnejte oba výsledky. Vyjádřete $\cos 5\alpha$, $\sin 5\alpha$ pomocí funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

[$\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$;
$\sin 5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$.]

2.123 Určete pátý člen binomického rozvoje výrazu

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{y^2}\right)^8,\ y\neq 0.$$

[$70\frac{x^8}{y^8}$]

2.124 Určete:

a) čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $(2\mathrm{i}-2\sqrt{5})^8$,

b) sedmý člen binomického rozvoje výrazu $\left(a^2-\frac{1}{a^3}\right)^{10}$, $a\neq 0$.

[a) $-71\,680\mathrm{i}\sqrt{5}$; b) $210a^{-10}$.]

2.125 Jak velké musí být x, aby ve výrazu $\left(4x-\frac{1}{3x}\right)^8$, $x\neq 0$, byl čtvrtý člen roven -14?

[$x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{64}$]

2.126 Vypočítejte dvacátý a dvaadvacátý člen binomického rozvoje výrazu $(1-\mathrm{i})^{40}$.

[$A_{20}=\binom{40}{19}\mathrm{i}$; $A_{22}=-\binom{40}{21}\mathrm{i}$.]

2.127 Určete desátý člen rozvoje výrazu $(-2+x^3)^{14}$.

[$-64\,064x^{27}$]

2.128 Určete prostřední člen rozvoje výrazu $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})^{12}$.

[$924a^5$, $a\geqq 0$.]

2.129 Určete osmý člen rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)^{10}$.

[$15\mathrm{i}$]

2.130 Určete třetí člen rozvoje výrazu $\left(-\mathrm{i}+\frac{1}{3}\right)^7$.

$\left[\ -\frac{7}{3}\mathrm{i}\ \right]$

2.131 Kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(\sqrt{x}-\frac{4}{x}\right)^{14}$ obsahuje x^{-2}?

[7. člen, $x > 0$.]

2.132 Kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(\frac{7}{\sqrt[4]{x}}-x\right)^{10}$ neobsahuje x?

[3. člen, $x > 0$.]

2.133 V rozvoji výrazu $\left(x^5-\frac{1}{4}\right)^7$ určete koeficient členu obsahujícího a) x^{12}, b) x^{20}.

$\left[\ \text{a) } 0;\ \text{b) } -\frac{35}{64}.\ \right]$

2.134 Vypočítejte poslední reálný člen rozvoje výrazu $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^9$.

[1 458]

2.135 Kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8$ obsahuje x^7?

[Čtvrtý člen rozvoje obsahuje x^7, $x \neq 0$.]

2.136 Pro jaké x je v rozvoji výrazu $(\sqrt[3]{4-2x}+\sqrt[6]{3-2x})^9$ sedmý člen roven 168?

[$x = 1$]

2.137 Určete člen, který obsahuje x^{14} v rozvoji výrazu

$$(1-x^3)^9 \cdot (1+x^2)^{10}.$$

[$8\,940x^{14}$]

2.7 Přehled základních pojmů

Je dána množina M o konečném počtu prvků $n \in \mathsf{N}$ (základní soubor prvků).

Libovolná k-tice prvků vybraná podle určitého pravidla z n prvků množiny M se nazývá k-prvková skupina (třída).

Přehled o počtu hledaných skupin →
- Vzhledem k pořadí prvků → Permutace
- Vzhledem k výběru prvků → Variace, Kombinace

	Permutace	Variace	Kombinace
Bez opakování	$P(n) = n!$	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_k(n) = \binom{n}{k}$
S opakováním	$P'_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$	$V'_k(n) = n^k$	$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$