

SBÍRKA ŘEŠENÝCH FYZIKÁLNÍCH ÚLOH

MECHANIKA

MOLEKULOVÁ FYZIKA A TERMIKA

ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

OPTIKA

FYZIKA MIKROSVĚTA

ROVNOMĚRNÝ POHYB

- 1) První třetinu dráhy projel automobil rychlostí $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, druhou třetinu rychlostí $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a poslední třetinu rychlostí $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Určete průměrnou rychlost pohybu.

$$v_1 = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_2 = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_3 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_p = ? \text{ (km} \cdot \text{h}^{-1}\text{)}$$

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3}; \text{ kde } t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{s}{3}}{v_1} = \frac{s}{3v_1}; \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \dots = \frac{s}{3v_2}; \quad t_3 = \frac{s}{3v_3}$$

$$v_p = \frac{s}{\frac{s}{3v_1} + \frac{s}{3v_2} + \frac{s}{3v_3}} = \frac{s}{\frac{sv_2v_3 + sv_1v_3 + sv_1v_2}{3v_1v_2v_3}} = \frac{3v_1v_2v_3s}{s(v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2)} \Rightarrow$$

$$v_p = \frac{3v_1v_2v_3}{v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2}$$

$$v_p = \frac{3 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 90}{30 \cdot 90 + 15 \cdot 90 + 15 \cdot 30} = 27$$

$$\underline{\underline{v_p = 27 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}}$$

Průměrná rychlost pohybu automobilu je $27 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

- 2) Traktor jel 20 minut rychlostí $3,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 25 minut rychlostí $5,15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 120 minut rychlostí $6,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a 10 minut rychlostí $9,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Vypočtěte průměrnou rychlost traktoru.

$$t_1 = 20 \text{ min} = 0,33 \text{ hod.}$$

$$v_1 = 3,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$t_2 = 25 \text{ min} = 0,42 \text{ hod.}$$

$$v_2 = 5,15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$t_3 = 120 \text{ min} = 2 \text{ hod.}$$

$$v_3 = 6,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$t_4 = 10 \text{ min} = 0,17 \text{ hod.}$$

$$v_4 = 9,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_p = ? \text{ (km} \cdot \text{h}^{-1}\text{)}$$

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} \Rightarrow$$

$$v_p = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 + v_4 t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$$

$$v_p = \frac{3,9 \cdot 0,33 + 5,15 \cdot 0,42 + 6,7 \cdot 2 + 9,9 \cdot 0,17}{0,33 + 0,42 + 2 + 0,17} = 6,35$$

$$\underline{\underline{v_p = 6,35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}}$$

Průměrná rychlost traktoru je $6,35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

- 3) Ze dvou míst M a N vzájemně vzdálených 100 m se současně pohybují dvě tělesa v jednom směru. Těleso pohybující se z místa M má rychlost $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, z místa N $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Za jakou dobu dostihne první těleso druhé? Jaké vzdálenosti urazí obě tělesa za tuto dobu?

$$s_0 = 100 \text{ m}$$

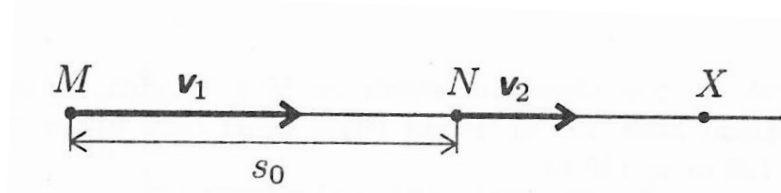
$$v_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = ? (\text{s})$$

$$s_1 = ? (\text{m})$$

$$s_2 = ? (\text{m})$$



Tělesa se setkají za dobu t v bodě X.

$$s_1 = v_1 t$$

$$s_2 = v_2 t$$

$$s_0 = s_1 - s_2 = v_1 t - v_2 t = t(v_1 - v_2) \Rightarrow$$

$$t = \frac{s_0}{v_1 - v_2}$$

$$t = \frac{100}{5 - 3} = 50$$

$$\underline{\underline{t = 50 \text{ s}}}$$

$$s_1 = 5 \cdot 50 = 250$$

$$\underline{\underline{s_1 = 250 \text{ m}}}$$

$$s_2 = 3 \cdot 50 = 150$$

$$\underline{\underline{s_2 = 150 \text{ m}}}$$

Obě tělesa se setkají za 50 s, první těleso urazí dráhu 250 m, druhé 150 m.

- 4) Automobil a cyklista se pohybují proti sobě rovnoměrným přímočarým pohybem. Jejich počáteční vzdálenost AB v čase $t = 0$ s je 300 m. Velikost rychlosti automobilu je $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, cyklisty $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Určete čas a místo jejich setkání.

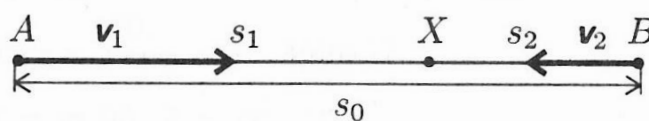
$$s_0 = 300 \text{ m}$$

$$v_1 = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = ? \text{ (s)}$$

$$s_1 = ? \text{ (m)}$$



Automobil a cyklista se potkají v bodě X.

$$s_1 = v_1 t \dots (a)$$

$$s_2 = v_2 t$$

$$s_0 = s_1 + s_2 \Rightarrow s_1 = s_0 - s_2 = s_0 - v_2 t \dots (b)$$

$$(a) = (b) \dots v_1 t = s_0 - v_2 t \Rightarrow v_1 t + v_2 t = s_0 \Rightarrow t(v_1 + v_2) = s_0$$

$$t = \frac{s_0}{v_1 + v_2}$$

$$t = \frac{300}{10 + 5} = 20$$

$$\underline{\underline{t = 20 \text{ s}}}$$

$$s_1 = v_1 t$$

$$s_1 = 10 \cdot 20$$

$$\underline{\underline{s_1 = 200 \text{ m}}}$$

Automobil a cyklista se setkají za 20 s v bodě X, který leží ve vzdálenosti 200 m od bodu A.

ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB

- 5) Motocykl zvýší při rovnoměrně zrychleném pohybu během 10 s rychlost z $6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ na $18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určete velikost zrychlení motocyklu a dráhu, kterou při tom ujede.

$$t = 10 \text{ s}$$

$$v_0 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a = ? (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

$$s = ? (\text{m})$$

$$v = v_0 + at$$

$$v - v_0 = at \Rightarrow$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a = \frac{18 - 6}{10} = 1,2$$

$$\underline{\underline{a = 1,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = 6 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^2 = 120$$

$$\underline{\underline{s = 120 \text{ m}}}$$

Motocykl urazil dráhu 120 m při zrychlení $1,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- 6) Hmotný bod urazí rovnoměrně zrychleným pohybem za dobu 6 s dráhu 18 m. Jeho počáteční rychlost byla $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určete velikost zrychlení hmotného bodu a velikost jeho rychlosti na konci dané dráhy.

$$t = 6 \text{ s}$$

$$s = 18 \text{ m}$$

$$v_0 = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a = ? (\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

$$v = ? (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow s - v_0 t = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 2(s - v_0 t) = a t^2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2}$$

$$a = \frac{2(18 - 1,5 \cdot 6)}{6^2} = 0,5$$

$$\underline{\underline{a = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}}$$

$$v = v_0 + at = v_0 + \frac{2(s - v_0 t)}{t^2} t = v_0 + \frac{2s - 2v_0 t}{t} = \frac{v_0 t + 2s - 2v_0 t}{t} =$$

$$= \frac{-v_0 t + 2s}{t} = \frac{2s}{t} - \frac{v_0 t}{t} \Rightarrow$$

$$v = \frac{2s}{t} - v_0$$

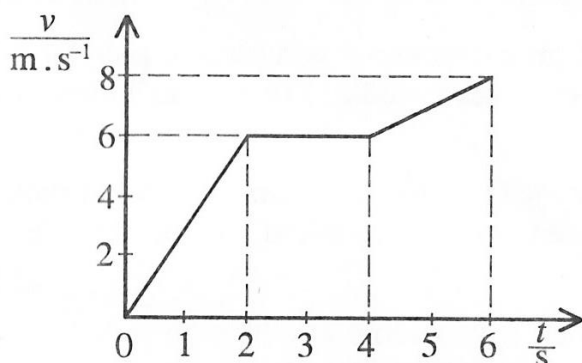
$$v = \frac{2 \cdot 18}{6} - 1,5 = 4,5$$

$$\underline{\underline{v = 4,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}}$$

(Zjednodušená možnost výpočtu: výše vypočtenou hodnotu zrychlení můžeme rovnou dosadit do vztahu pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu $v = v_0 + at \Rightarrow v = 1,5 + 0,5 \cdot 6 = 4,5 \Rightarrow v = 4,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$)

Velikost zrychlení hmotného bodu je $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a jeho rychlost na konci dané dráhy je $4,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- 7) Na obrázku je nakreslen graf velikosti rychlosti hmotného bodu v závislosti na čase. Určete a) velikost jeho rychlosti v čase $t_1 = 1$ s, $t_2 = 3$ s, $t_3 = 5$ s; b) velikost jeho zrychlení v čase $t_1 = 1$ s, $t_2 = 3$ s, $t_3 = 5$ s.

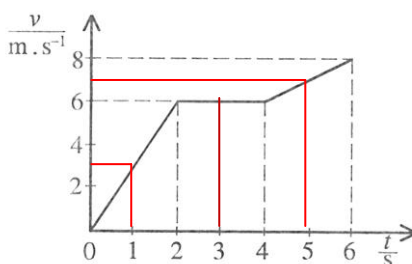


- a) Jelikož je na obrázku nakreslen graf velikosti rychlosti hmotného bodu v závislosti na čase, můžeme z něj rovnou určit hodnoty rychlosti v daných časech:

$$t_1 = 1 \text{ s} \dots\dots\dots v_1 = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$t_2 = 3 \text{ s} \dots\dots\dots v_2 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$t_3 = 5 \text{ s} \dots\dots\dots v_3 = 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$



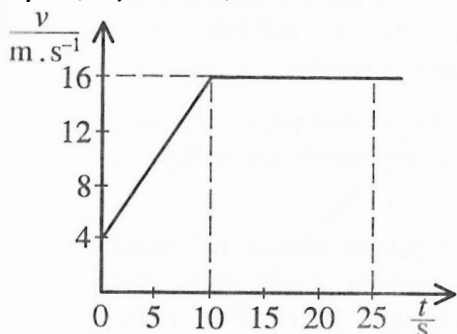
- b) Pro výpočet zrychlení v jednotlivých časech si musíme pomoci výpočtem:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

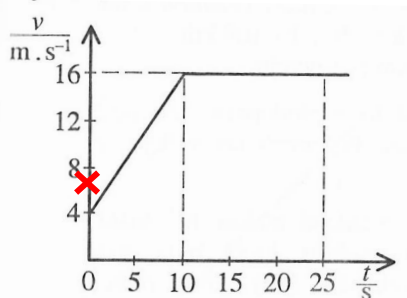
Vypočet vyjádříme v přehledné tabulce, potřebné hodnoty vyčteme z grafu:

$t_1 = 1$ s	$t_2 = 3$ s	$t_3 = 5$ s
$v_0 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v_0 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v_0 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v = 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
$t = 1$ s	<i>rovnoměrný pohyb</i>	$t = 1$ s
$a_1 = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$	$a_2 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$	$a_3 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

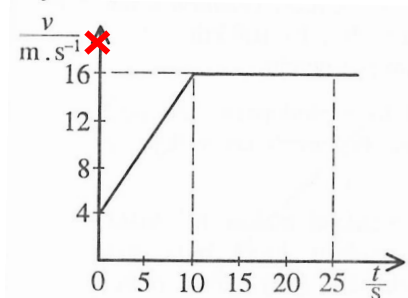
- 8) Na obrázku vidíme graf velikosti rychlosti automobilu v závislosti na čase. Určete a) velikost počáteční rychlosti automobilu; b) velikost jeho nejvyšší dosažené rychlosti; c) velikost jeho zrychlení v prvních 10 sekundách pohybu; d) dráhu, kterou automobil ujel za prvních 10 sekund pohybu.



a) $v_0 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$



b) $v = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$



c) $t = 10 \text{ s}$

$v = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

$v_0 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$

$a = ?$

$a = \frac{16-4}{10} = 1,2$

$a = 1,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

d) $a = 1,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

$t = 10 \text{ s}$

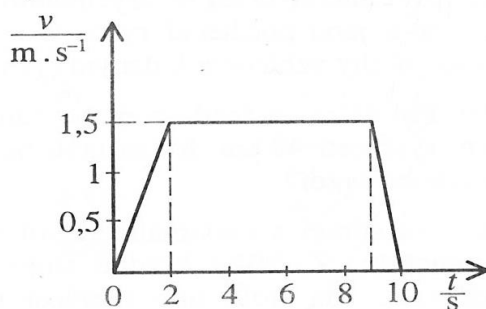
$v_0 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

$s = 4 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^2 = 100$

$s = 100 \text{ m}$

- 9) Na obrázku je nakreslen graf velikosti výtahu v závislosti na čase. a) Jaké pohyby koná výtah v jednotlivých úsecích? b) Jak velká jsou zrychlení v jednotlivých úsecích? c) Jakou dráhu urazí výtah za celou dobu pohybu?



- a) V úseku (0-2 s) koná výtah pohyb rovnoměrně zrychlený, v úseku (2-9 s) pohyb rovnoměrný a v úseku (9-10 s) pohyb rovnoměrně zpomalený.

- b) Zrychlení pro rovnoměrně zrychlený pohyb vypočítáme podle vztahu

$$v = v_0 + at \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$a = \frac{1,5 - 0}{2} = 0,75$$

$$\underline{\underline{a = 0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \text{ (zrychlení)}$$

$$v_0 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$a = \frac{0 - 1,5}{1} = -1,5$$

$$\underline{\underline{a = -1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \text{ (zpomalení)}$$

Zrychlení v úseku (2-9 s) nemá smysl počítat, jelikož se nejedná o pohyb rovnoměrně zrychlený ani zpomalený.

c) Dráhu celého pohybu výtahu musíme počítat po jednotlivých úsecích:

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

$$s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_2 t_2 + v_3 t_3 - \frac{1}{2} a_3 t_3^2 ,$$

kde potřebné údaje zjistíme z obrázku a předchozích výpočtů.

$$a_1 = 0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, t_1 = 2 \text{ s}, v_2 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, t_2 = 7 \text{ s}, v_3 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, t_3 = 1 \text{ s}, a_3 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$t_3 = 1 \text{ s}$$

$$s = \frac{1}{2} 0,75 \cdot 2^2 + 1,5 \cdot 7 + 1,5 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1^2 = 12,75$$

$$\underline{\underline{s = 12,75 \text{ m}}}$$

ROVNOMĚRNĚ ZPOMALENÝ POHYB

- 10) Vlak jede po vodorovné trati stálou rychlostí o velikosti $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Na určitém úseku trati se začne pohybovat rovnoměrně zpomaleně se zrychlením o velikosti $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jaká je brzdná dráha vlaku? Za jakou dobu od počátku brzdění vlak zastaví?

$$v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$s = ? \text{ (m)}$$

$$t = ? \text{ (s)}$$

Jakmile vlak zastaví, je jeho okamžitá rychlost rovna nule! ($v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$v = v_0 - at \Rightarrow at = v_0 - v \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_0 - v}{a}$$

$$t = \frac{20 - 0}{0,1} = 200$$

$$\underline{\underline{t = 200 \text{ s}}}$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

$$s = 20 \cdot 200 - \frac{1}{2} 0,1 \cdot 200^2 = 2000$$

$$\underline{\underline{s = 2000 \text{ m}}}$$

Brzdná dráha vlaku je 2000 m, zastaví 200 s od počátku brzdění.

- 11) Pro účinnost brzd osobního automobilu je předepsáno, že musí při počáteční rychlosti $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ zastavit na dráze $12,5 \text{ m}$. S jak velkým zrychlením automobil brzdí?
-

$$v_0 = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 11,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$s = 12,5 \text{ m}$$

$$\underline{a = ? (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})}$$

$$v = v_0 - at \Rightarrow at = v_0 - v \Rightarrow t = \frac{v_0 - v}{a} \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{a \cdot v_0^2}{2a^2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2a} =$$

$$\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow 2as = v_0^2 \Rightarrow$$

$$\underline{a = \frac{v_0^2}{2s}}$$

$$a = \frac{11,11^2}{2 \cdot 12,5} = 4,94$$

$$\underline{a = 4,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Automobil brzdí se zrychlením $4,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

VOLNÝ PÁD

- 12) Těleso padá volným pádem z výšky 80 m. Určete a) dobu, za kterou dopadne na zem; b) velikost rychlosti dopadu? ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

$$h = 80 \text{ m}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$t = ? (\text{s})$$

$$v = ? (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$v = gt \Rightarrow t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow 2hg = v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2hg}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 80 \cdot 10} = 40$$

$$\underline{v = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$t = \frac{v}{g}$$

$$t = \frac{40}{10} = 4$$

$$\underline{t = 4 \text{ s}}$$

Těleso dopadne na zem rychlostí $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ za 4 s.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 13) Jak hluboká je propast Macocha, jestliže volně puštěný kámen dopadne na její dno za dobu 5,25 s? Odpor vzduchu neuvažujte.
-

$$t = 5,25 \text{ s}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$h = ? \text{ (m)}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 5,25^2 = 135,19$$

$$\underline{\underline{h = 135,19 \text{ m}}}$$

Macocha je hluboká 135,10 m.

- 14) Kroupy dopadají na zem rychlostí $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Z jaké výšky kroupy padají, jestliže neuvažujeme odporové síly vzduchu? ($g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$)
-

$$v = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$h = ? \text{ (m)}$$

$$v = gt \Rightarrow t = \frac{v}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} \Rightarrow$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h = \frac{100^2}{2 \cdot 10} = 500$$

$$\underline{\underline{h = 500 \text{ m}}}$$

Kroupy padají z výšky 500 m.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

15) Rotor parní turbíny má frekvenci otáčení 50 s^{-1} . Vypočtěte obvodovou rychlost rotoru, je-li jeho průměr 120 cm.

$$f = 50 \text{ s}^{-1}$$

$$d = 120 \text{ cm} \Rightarrow r = 0,6 \text{ m}$$

$$v = ? (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$v = 2\pi r f$$

$$v = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,6 \cdot 50 = 188,4$$

$$\underline{v = 188,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Obvodová rychlost rotoru je $188,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



evropský
sociální
fond v ČR



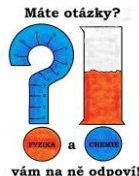
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 16) Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru 50 cm s frekvencí 2 Hz. Určete periodu a velikost rychlosti hmotného bodu.
-

$$r = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

$$f = 2 \text{ Hz}$$

$$T = ? \text{ (s)}$$

$$v = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{1}{2}$$

$$\underline{T = 0,5 \text{ s}}$$

$$v = 2\pi r f$$

$$v = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 2 = 6,28$$

$$\underline{v = 6,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Perioda hmotného bodu je 0,5 s a rychlost je 6,28 m·s⁻¹.

- ❖ Nákladní automobil o délce 6 m jede rychlostí $66 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Předjíždí jej motocykl jedoucí rychlostí $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Předjíždění začíná již 16 m za automobilem a končí 18 m před automobilem. Jak dlouho toto předjíždění trvá a jakou dráhu při tom motocykl urazí?

$$l = 6 \text{ m}$$

$$v_1 = 66 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 18,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$d_1 = 16 \text{ m}$$

$$d_2 = 18 \text{ m}$$

$$t = ? \text{ (s)}$$

$$s = ? \text{ (m)}$$

Kdyby se automobil nepohyboval, urazil by motocykl při předjíždění dráhu $s_0 = d_1 + l + d_2$. Protože se však automobil pohybuje rychlostí v_1 , musí motocykl urazit při předjíždění dráhu $s = s_0 + v_1 \cdot t$, kde t je hledaná doba předjíždění. Dráhu motocyklu je možno také určit vztahem $s = v_2 \cdot t$.

Protože se jedná o tutéž veličinu, můžeme obě rovnice porovnat:

$$d_1 + l + d_2 + v_1 t = v_2 t$$

$$v_2 t - v_1 t = d_1 + l + d_2$$

$$(v_2 - v_1)t = d_1 + l + d_2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{d_1 + l + d_2}{v_2 - v_1}$$

$$t = \frac{16 + 6 + 18}{20 - 18,33} = 23,95$$

$$\underline{\underline{t = 23,95 \text{ s}}}$$

$$s = v_2 t$$

$$s = 20 \cdot 23,95 = 479$$

$$\underline{\underline{s = 479 \text{ m}}}$$

Motocykl předjíždí automobil 23,95 s a urazí při tom dráhu 479 m.

- ❖ Řidič automobilu, který se pohyboval rychlostí $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, spatřil na dráze překážku a začal brzdit se zrychlením $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jakou dráhu do zastavení automobil urazil, jestliže řidič zareagoval na nebezpečí se zpožděním $0,7 \text{ s}$?

$$v_0 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 27,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$t_r = 0,7 \text{ s};$$

$$s = ? \text{ (m)}$$

t_r ... tzv. reakční doba (po zjištění nebezpečí se automobil po tuto dobu pohyboval rovnoměrným pohybem a urazil při tom dráhu $s_r = v_0 t_r$)

$$s = s_r + s_b$$

s_b ... brzdná dráha (dráha od začátku brzdění po úplné zastavení)

$$s_b = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{a \cdot v_0^2}{2a^2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} =$$

$$\frac{2v_0^2 - v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow 2as = v_0^2 \Rightarrow s_b = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$s = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}$$

$$s = 27,78 \cdot 0,7 + \frac{27,78^2}{2 \cdot 5} = 96,62$$

$$\underline{\underline{s = 96,62 \text{ m}}}$$

Automobil urazil dráhu 96,62 m.

- ❖ Vypočítejte obvodovou a úhlovou rychlost kola automobilu, který jede rychlostí $108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Kolik otáček vykonají kola automobilu za 1 s, jestliže při jednom otočení kola ujede automobil vzdálenost 2 m?

$$v_a = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$o = 2 \text{ m} \text{ (dráha, kterou ujede kolo při jedné otočce = obvod kružnice)}$$

$$v = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$\omega = ? \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$f = ? \text{ (Hz) (počet otáček za 1 sekundu = frekvence)}$$

Obvodová rychlost kola automobilu v je stejná jako rychlost automobilu v_a

$$\Rightarrow \underline{\underline{v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

$$o = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{o}{2\pi}$$

$$v = \omega r \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{\frac{o}{2\pi}} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2\pi v}{o}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 30}{2} = 94,2$$

$$\underline{\underline{\omega = 94,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

$$v = 2\pi r f = 2\pi f \frac{o}{2\pi} = f \cdot o \Rightarrow$$

$$f = \frac{v}{o}$$

$$f = \frac{30}{2} = 15$$

$$\underline{\underline{f = 15 \text{ Hz}}}$$

Obvodová rychlost kola auta je $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, úhlová rychlost má velikost $94,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, kola vykonají 15 otáček.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

- 1) S jak velkým zrychlením se rozjíždí vlak o hmotnosti 800 t, působí-li na něj tažná síla lokomotivy 160 kN?

$$m = 800 \text{ t} = 800\,000 \text{ kg}$$

$$F = 160 \text{ kN} = 160\,000 \text{ N}$$

$$a = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

$$F = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{160\,000}{800\,000} = 0,2$$

$$\underline{a = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Vlak se rozjíždí se zrychlením $0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- 2) Automobil o hmotnosti 1200 kg zvětšil rychlost ze $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ za dobu 10 s. a) Jak velká síla tuto změnu rychlosti způsobila? b) Jakou vzdálenost při zvětšující se rychlosti automobil urazil?
-

$$m = 1200 \text{ kg}$$

$$v_1 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$F = ? \text{ (N)}$$

$$s = ? \text{ (m)}$$

Předpokládáme, že se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený, tzn.

$$v_2 = v_1 + at \Rightarrow at = v_2 - v_1 \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

$$F = ma \Rightarrow$$

$$F = m \frac{v_2 - v_1}{t}$$

$$F = 1200 \cdot \frac{25 - 20}{10} = 600$$

$$\underline{\underline{F = 600 \text{ N}}}$$

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{t} t^2 = v_1 t + \frac{1}{2} (v_2 - v_1) t = v_1 t + \frac{1}{2} v_2 t - \frac{1}{2} v_1 t \Rightarrow$$

$$s = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) t$$

$$s = \frac{1}{2} (20 + 25) \cdot 10 = 225$$

$$\underline{\underline{s = 225 \text{ m}}}$$

Změnu způsobila síla o velikosti 600 N, automobil urazil dráhu 225 m.

- 3) Vlak o hmotnosti 800 t, který jede po vodorovné trati rychlostí $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, začne brzdít a zastaví na dráze 400 m. Jak velká brzdící síla při tom na vlak působila?

$$m = 800 \text{ t} = 800\,000 \text{ kg}$$

$$v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$s = 400 \text{ m}$$

$$F = ? \text{ (N)}$$

Předpokládáme, že se jedná o pohyb rovnoměrně zpomalený, tzn.

$$v = v_0 - at \Rightarrow at = v_0 - v \Rightarrow t = \frac{v_0 - v}{a} \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{a \cdot v_0^2}{2a^2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2a} =$$

$$\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow 2as = v_0^2 \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2s}$$

$$F = ma \Rightarrow$$

$$F = m \frac{v_0^2}{2s}$$

$$F = 800\,000 \frac{20^2}{2 \cdot 400} = 400\,000$$

$$\underline{\underline{F = 400\,000 \text{ N} = 400 \text{ kN}}}$$

Na vlak působila brzdící síla o velikosti 400 kN.

- 4) Těleso, které bylo na začátku v klidu, se začalo působením stálé síly 20 N pohybovat rovnoměrně zrychleně a urazilo při tom za 10 s dráhu 25 m. Jaká je jeho hmotnost?
-

$$F = 20 \text{ N}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

$$s = 25 \text{ m}$$

$$m = ? \text{ (kg)}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2s = at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

$$F = ma \Rightarrow m = \frac{F}{a} = \frac{F}{\frac{2s}{t^2}} \Rightarrow$$

$$m = \frac{Ft^2}{2s}$$

$$m = \frac{20 \cdot 10^2}{2 \cdot 25} = 40$$

$$\underline{\underline{m = 40 \text{ kg}}}$$

Hmotnost tělesa je 40 kg.

- 5) Z pušky o hmotnosti 4 kg vyletěla střela o hmotnosti 20 g rychlostí $600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Jak velkou rychlostí se začne pohybovat puška, není-li upevněna?
-

$$m_p = 4 \text{ kg}$$

$$m_s = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$$

$$v_s = 600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\underline{v_p = ? (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})}$$

$$p_p = p_s$$

$$m_p v_p = m_s v_s$$

$$v_p = \frac{m_s v_s}{m_p}$$

$$v_p = \frac{0,02 \cdot 600}{4} = 3$$

$$\underline{\underline{v_p = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}}$$

Puška se začne pohybovat rychlostí $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- 6) Kosmická loď startuje směrem vzhůru se stálým zrychlením $50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jak velkou tlakovou silou působí kosmonaut na sedadlo, je-li jeho hmotnost s výstrojí 90 kg ? ($g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$)
-

$$a = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$m = 90 \text{ kg}$$

$$g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$F = ? \text{ (N)}$$

Hledanou tlakovou sílu vypočítáme jako výslednici síly tíhové, která na kosmonauta působí, a síly, která uděluje kosmické lodi dané zrychlení.

$$F = ma + mg$$

$$F = 90 \cdot 50 + 90 \cdot 10 = 5400$$

$$\underline{\underline{F = 5400 \text{ N} = 5,4 \text{ kN}}}$$

Tlaková síla působící na kosmonauta má velikost 5,4 kN.

DOSTŘEDIVÁ A Odstředivá síla

7) Kolo o průměru 60 cm vykonává 1000 otáček za minutu. Určete dostředivé zrychlení bodů ležících na jeho obvodu.

$$d = 60 \text{ cm} \Rightarrow r = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$n = 1000$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \quad \dots \text{ počet otáček za určitý čas určuje frekvenci, } f = \frac{n}{t}$$

$$f = \frac{1000}{60} = 16,67 \text{ Hz}$$

$$\underline{a_d = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}}$$

$$v = 2\pi r f$$

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r f)^2}{r} \Rightarrow$$

$$\underline{a_d = 4\pi^2 f^2 r}$$

$$a_d = 4 \cdot 3,14^2 \cdot 16,67^2 \cdot 0,3 = 3287,85$$

$$\underline{\underline{a_d = 3287,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}}$$

Dostředivé zrychlení má velikost $3287,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- 8) Jak velká dostředivá síla působí na naši Zemi, která se pohybuje kolem Slunce přibližně po kružnici o poloměru 150 milionů kilometrů rychlostí $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$? Hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.
-

$$r = 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$v = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$F_d = ? \text{ (N)}$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

$$F_d = ma \Rightarrow$$

$$F_d = m \frac{v^2}{r}$$

$$F_d = 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{150 \cdot 10^9} = 3,6 \cdot 10^{22}$$

$$\underline{F_d = 3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}}$$

Na Zemi působí dostředivá síla o velikosti $3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}$.

9) Jak velká setrvačná odstředivá síla působí na řidiče o hmotnosti 60 kg, projíždí-li automobil zatáčkou o poloměru 20 m rychlostí $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?

$$m = 60 \text{ kg}$$

$$r = 20 \text{ m}$$

$$v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\underline{F_o = ? \text{ (N)}}$$

$$a_o = \frac{v^2}{r}$$

$$F_o = ma \Rightarrow$$

$$\underline{F_o = m \frac{v^2}{r}}$$

$$F_o = 60 \cdot \frac{5^2}{20} = 75$$

$$\underline{\underline{F_o = 75 \text{ N}}}$$

Na řidiče působí odstředivá síla o velikosti 75 N.

- 10) Jak velká setrvačná odstředivá síla působí na těleso o hmotnosti 100 kg, které leží na zemském rovníku? Rovníkový poloměr Země je přibližně 6400 km, úhlová rychlost zemské rotace $7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
-

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$r = 6400 \text{ km} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\underline{F_o = ? \text{ (N)}}$$

$$a_o = \frac{v^2}{r}$$

$$F_o = ma \Rightarrow F_o = m \frac{v^2}{r} = m \frac{\omega^2 r^2}{r} \Rightarrow$$

$$\underline{F_o = m\omega^2 r}$$

$$F_o = 100 \cdot (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 3,41$$

$$\underline{\underline{F_o = 3,41 \text{ N}}}$$

Na těleso působí odstředivá síla o velikosti 3,41 N.

- ❖ Těleso o hmotnosti 500 kg je taženo rovnoměrně zrychleným pohybem svisle vzhůru. Určete zrychlení, při kterém se tažné lano přetrhne, jestliže jeho pevnost v tahu je 15 kN. ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

$$m = 500 \text{ kg}$$

$$F = 15 \text{ kN} = 15\,000 \text{ N}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = ? (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

Na těleso působí svisle vzhůru tažná síla lana F , směrem dolů tíhová síla $F_G = mg$; výslednice obou sil uděluje tělesu zrychlení, tzn. $F_v = F - F_G$. Platí 2.

Newtonův pohybový zákon $\Rightarrow F_v = ma$

$$ma = F - mg \Rightarrow$$

$$a = \frac{F - mg}{m}$$

Pevnost v tahu je síla, kterou musíme překonat, aby se lano přetrhlo. Pokud její hodnotu dosadíme za tažnou sílu lana, dostaneme hledané zrychlení.

$$a = \frac{15000 - 500 \cdot 10}{500} = 20$$

$$\underline{a = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Lano se přetrhne při zrychlení $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- ❖ Automobil projíždí zatáčkou o poloměru 80 m. Jakou největší rychlostí může jet, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky 0,5?

$$r = 80 \text{ m}$$

$$f = 0,5$$

$$v_{\max} = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

Síla odstředivá musí být v rovnováze se silou tlakovou ($F = F_{Gf}$), tzn.

$$F = F_o$$

$$mfg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow fg = \frac{v^2}{r} \Rightarrow fgr = v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{fgr}$$

$$v = \sqrt{0,5 \cdot 9,81 \cdot 80} = 19,81$$

$$\underline{\underline{v = 19,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Automobil může jet maximální rychlostí $19,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



evropský
sociální
fond v ČR



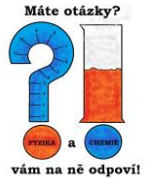
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MECHANICKÁ PRÁCE

- 1) Jakou práci vykonáme při vytahování hřebíku délky 6 cm, působíme-li na něj průměrnou silou 120 N?

$$l = s = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$F = 120 \text{ N}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$W = F \cdot s$$

$$W = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 120 = 7,2$$

$$\underline{W = 7,2 \text{ J}}$$

Při vytahování hřebíku vykonáme práci 7,2 J.

- 2) Jakou mechanickou práci vykonáme, když závaží o hmotnosti 5 kg
- a) zvedneme rovnoměrným pohybem do výšky 2 m;
 - b) držíme ve výšce 2 m nad zemí;
 - c) přemístíme ve vodorovném směru do vzdálenosti 2 m?
-

$$m = 5 \text{ kg}$$

$$s = 2 \text{ m}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

- a) Při zvedání závaží rovnoměrným pohybem směrem vzhůru na něj působíme silou, která se rovná tíhové síle $\Rightarrow F_G = mg$.

$$W = F \cdot s = F_G \cdot s \Rightarrow$$

$$W = mgs$$

$$W = 5 \cdot 9,81 \cdot 2 = 98,1$$

$$\underline{\underline{W = 98,1 \text{ J}}}$$

Při zvedání závaží vykonáme práci 98,1 J.

- b) Držíme-li závaží, působíme na něj také tíhovou silou, ale protože ho nepřemísťujeme, je dráha nulová $\Rightarrow$

$$W = mgs$$

$$W = 5 \cdot 9,81 \cdot 0 = 0$$

$$\underline{\underline{W = 0 \text{ J}}}$$

Při držení závaží práci nekonáme.

- c) Při přemísťování závaží ve vodorovném směru svírá působící síla se směrem pohybu úhel $90^\circ \Rightarrow$

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha$$

$$W = 5 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\underline{\underline{W = 0 \text{ J}}}$$

Při přemísťování závaží ve vodorovném směru práci nekonáme.

- 3) Jakou mechanickou práci vykonáme, táhneme-li po vodorovné rovině vozík do vzdálenosti 100 m, přičemž na něj působíme silou o velikosti 20 N? Řešte pro případy, kdy síla působící na vozík svírá se směrem trajektorie a) 0° ; b) 30° ; c) 60° .
-

$$s = 100 \text{ m}$$

$$F = 20 \text{ N}$$

$$\alpha = 0^\circ, \alpha = 30^\circ, \alpha = 60^\circ$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

$$\text{a) } W = 20 \cdot 100 \cdot \cos 0^\circ = 2000$$

$$\underline{W = 2000 \text{ J}}$$

Vykonáme práci 2000 J.

$$\text{b) } W = 20 \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ = 1732,05$$

$$\underline{W = 1732,05 \text{ J}}$$

Vykonáme práci 1732,05 J.

$$\text{c) } W = 20 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 1000$$

$$\underline{W = 1000 \text{ J}}$$

Vykonáme práci 1000 J.

- 4) Jakou mechanickou práci vykonáme, jestliže zvedáme závaží o hmotnosti 5 kg do výšky 2 m a) rovnoměrným pohybem; b) se zrychlením $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?
-

$$m = 5 \text{ kg}$$

$$h = s = 2 \text{ m}$$

$$a = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

a) $W = F \cdot s = F_G \cdot s \Rightarrow$

$$W = mgs$$

$$W = 5 \cdot 9,81 \cdot 2 = 98,1$$

$$\underline{W = 98,1 \text{ J}}$$

Při zvedání závaží rovnoměrným pohybem vykonáme práci 98,1 J.

b) $W = F \cdot s = (F_G + F)s = (mg + ma)s$

$$W = m(g + a)s$$

$$W = 5 \cdot (9,81 + 2) \cdot 2 = 118,1$$

$$\underline{W = 118,1 \text{ J}}$$

Při zvedání závaží se zrychlením vykonáme práci 118,1 J.

- 5) Jakou rychlostí rovnoměrně zvedal jeřáb jeden konec vodorovně ležícího dlouhého nosníku o hmotnosti 8 000 kg, jestliže za dobu 4 s vykonal práci 15 696 J? Nosník má po celé délce shodný příčný průřez.
-

$$m = 8\,000 \text{ kg}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

$$W = 15\,696 \text{ J}$$

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$v = ? \text{ (m}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}$$

$$W = F \cdot s = m \cdot g \cdot v \cdot t \Rightarrow$$

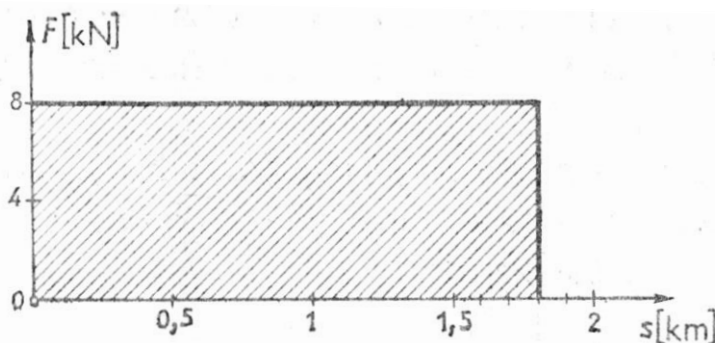
$$v = \frac{W}{m \cdot g \cdot t}$$

$$v = \frac{15696}{8000 \cdot 9,81 \cdot 4} = 0,05$$

$$\underline{v = 0,05 \text{ ms}^{-1}}$$

Jeřáb zvedal nosník rychlostí $0,05 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- 6) Vypočtete podle grafu na obrázku práci, kterou vykonala hoblovka při obrobení povrchu jedné desky.



Z grafu na obrázku vyčteme potřebné údaje:

$$F = 8 \text{ kN} = 8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$s = 1,8 \text{ km} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$W = ?(\text{J})$$

$$W = F \cdot s$$

$$W = 8 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^3 = 14\,400\,000$$

$$\underline{\underline{W = 14\,400\,000 \text{ J} = 14,4 \text{ MJ}}}$$

Hoblovka vykonala práci 14,4 MJ.

Poznámka: Pokud byste zapomněli vzorec na výpočet mechanické práce, můžete využít i skutečnost, že velikost práce se v „pracovním diagramu“ vypočítá jako obsah plochy, v našem případě obdélníka ($S = a \cdot b$).

- 7) Určete práci, kterou při volném pádu tělesa o hmotnosti 2 kg vykoná tíhová síla za prvních 5 s. Tíhové zrychlení je $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, odpor vzduchu neuvažujeme.

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$t = 5 \text{ s}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$W = F_G \cdot s = m \cdot g \cdot s$$

$$\text{Pro dráhu volného pádu platí } s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow W = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot gt^2$$

$$W = \frac{1}{2}m(g \cdot t)^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (10 \cdot 5)^2 = 2\,500$$

$$\underline{\underline{W = 2\,500 \text{ J} = 2,5 \text{ kJ}}}$$

Tíhová síla vykoná práci 2,5 kJ.

- 8) Po vodorovné trati se rozjíždí vlak se zrychlením $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jakou práci vykoná lokomotiva o tažné síle 40 kN za dobu 1 min ?
-

$$a = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$F = 40 \text{ kN} = 40 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$W = F \cdot s, \text{ kde } s = \frac{1}{2} a t^2$$

$$W = \frac{1}{2} F \cdot a \cdot t^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 60^2 = 36\,000\,000$$

$$\underline{\underline{W = 36\,000\,000 \text{ J} = 36 \text{ MJ}}}$$

Lokomotiva vykoná práci 36 MJ.

MECHANICKÁ ENERGIE

- 9) Chlapec o hmotnosti 40 kg, který běží po hřišti rychlostí $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, vykopne míč o hmotnosti 0,5 kg počáteční rychlostí $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete kinetickou energii chlapce a míče.

$$m_1 = 40 \text{ kg}$$

$$v_1 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_2 = 0,5 \text{ kg}$$

$$v_2 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$E_{K1} = ? \text{ (J)}$$

$$E_{K2} = ? \text{ (J)}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2^2 = 80$$

$$\underline{\underline{E_{K1} = 80 \text{ J}}}$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 20^2 = 100$$

$$\underline{\underline{E_{K2} = 100 \text{ J}}}$$

Kinetická energie chlapce je 80 J, kinetická energie míče 100 J.

- 10) Automobil o hmotnosti 1,2 t zvětšil při výjezdu na dálnici rychlost ze $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- a) Vypočtete přírůstek kinetické energie automobilu.
- b) Jakou práci by vykonal motor automobilu při daném zvětšení rychlosti? Odpor vzduchu neuvažujte.
-

$$m = 1,2 \text{ t} = 1\,200 \text{ kg}$$

$$v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta E_K = ? \text{ (J)}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$\text{a) } \Delta E_K = E_{K1} - E_{K0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot (25^2 - 20^2) = 135\,000$$

$$\underline{\underline{\Delta E_K = 135\,000 \text{ J} = 135 \text{ kJ}}}$$

$$\text{b) } W = \Delta E_K \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{W = 135\,000 \text{ J} = 135 \text{ kJ}}}$$

Přírůstek kinetické energie automobilu je 135 kJ, stejně tak velká je práce motoru automobilu při daném zvětšení rychlosti.

- 11) Těleso o hmotnosti 2 kg volně padá z výšky 45 m. Jaká bude jeho tíhová potenciální energie a kinetická energie za 2 s od začátku pohybu? Jaká je celková mechanická energie tělesa? Tíhové zrychlení je $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$h_0 = 45 \text{ m}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$E_p = ? \text{ (J)}$$

$$E_K = ? \text{ (J)}$$

$$E = ? \text{ (J)}$$

$$g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Volný pád je pohyb rovnoměrně zrychlený, tzn. za dobu t bude padající těleso nad zemí ve výšce $h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$

$$E_p = mgh = mg\left(h_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$E_p = 2 \cdot 10 \cdot \left(45 - \frac{1}{2}10 \cdot 2^2\right) = 500$$

$$\underline{E_p = 500 \text{ J}}$$

Těleso má 2 s po začátku pohybu tíhovou potenciální energii 500 J.

Rychlost tělesa za dobu t od začátku volného pádu je $v = gt \Rightarrow$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$E_K = \frac{1}{2}m(gt)^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (10 \cdot 2)^2 = 400$$

$$\underline{E_K = 400 \text{ J}}$$

Těleso má 2 s po začátku pohybu kinetickou energii 400 J.

Celková mechanická energie je rovna součtu kinetické a tíhové potenciální energie $\Rightarrow$

$$E = E_K + E_p$$

$$E = 400 + 500 = 900$$

$$\underline{E = 900 \text{ J}}$$

Celková mechanická energie tělesa je 900 J.

- 12) Těleso o hmotnosti 1 kg volně padá z výšky 45 m. Sestrojte grafy jeho kinetické a potenciální energie jako funkce času.

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$h_0 = 45 \text{ m}$$

$$v = gt$$

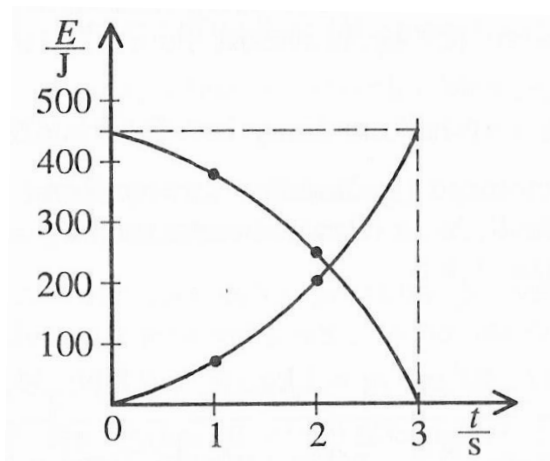
$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_K = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

$\frac{t}{[s]}$	0	1	2	3
$\frac{E_K}{[J]}$	0	48,12	192,47	433,06

Volný pád je pohyb rovnoměrně zrychlený, tzn. za dobu t bude padající těleso nad zemí ve výšce $h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$

$$E_p = mgh \Rightarrow E_p = mg\left(h_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$\frac{t}{[s]}$	0	1	2	3
$\frac{E_p}{[J]}$	441,45	393,33	248,98	8,39



- 13) Letadlo o hmotnosti 60 t vystoupilo z výšky 1000 m do výšky 3000 m, přičemž zvětšilo rychlost ze $160 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ na $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jakou práci vykonaly motory letadla? Odpor vzduchu neuvažujte.
-

$$m = 60 \text{ t} = 60\,000 \text{ kg}$$

$$h_0 = 1000 \text{ m}$$

$$h_1 = 3000 \text{ m}$$

$$v_0 = 160 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_1 = 200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$W = \Delta E = E_1 - E_0 = (E_{k1} + E_{p1}) - (E_{k0} + E_{p0}) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0 \right) \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) + m g (h_1 - h_0)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 60\,000 (200^2 - 160^2) + 60\,000 \cdot 9,81 (3000 - 1000) = 1\,609\,200\,000$$

$$\underline{\underline{W = 1\,609\,200\,000 \text{ J} = 1,61 \text{ GJ}}}$$

Motory letadla vykonaly práci 1,61 GJ.

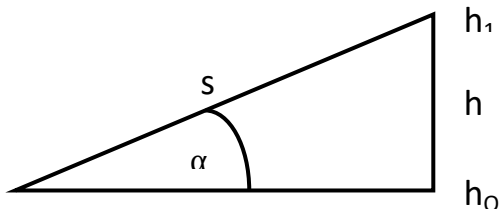
- 14) Jak se změní potenciální tíhová energie tělesa o hmotnosti 70 kg, je-li vytaženo rovnoměrným přímočarým pohybem po nakloněné rovině délky 5 m, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° .

$$m = 70 \text{ kg}$$

$$s = 5 \text{ m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\Delta E_p = ? (\text{J})$$



$$\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = mgh_1 - mgh_0 = mg(h_1 - h_0) = mgh \Rightarrow$$

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot s$$

$$\Delta E_p = 70 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \cdot 5 = 1\,716,75$$

$$\Delta E_p = \underline{\underline{1\,716,75 \text{ J}}}$$

Hodnota potenciální tíhové energie vzroste o 1 716,75 J.

- 15) Střela o hmotnosti 8 g pohybující se rychlostí $400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ prorazila dřevěné břevno o tloušťce 20 cm a vyletěla z něho rychlostí $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určete střední sílu, kterou střela působila na břevno.

$$m = 8 \text{ g} = 0,008 \text{ kg}$$

$$v_1 = 400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$d = s = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$v_2 = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$F = ? \text{ (N)}$$

$$W = \Delta E_k \Rightarrow F \cdot s = E_{k1} - E_{k2} \Rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow$$

$$F \cdot s = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow 2 \cdot F \cdot s = m(v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow$$

$$F = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2 \cdot s}$$

$$F = \frac{0,008(400^2 - 100^2)}{2 \cdot 0,2} = 3\,000$$

$$\underline{\underline{F = 3\,000 \text{ N} = 3 \text{ kN}}}$$

Střela působila na břevno silou 3 kN.

VÝKON A ÚČINNOST

- 16) Porovnejte výkony dvou chlapců při závodech ve šplhání. Chlapec o hmotnosti 60 kg vyšplhá do výšky 4 m za 5 s, chlapec o hmotnosti 72 kg do stejné výšky za 6 s. Tíhové zrychlení má velikost $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$m_1 = 60 \text{ kg}$$

$$h = s = 4 \text{ m}$$

$$t_1 = 5 \text{ s}$$

$$m_2 = 72 \text{ kg}$$

$$t_2 = 6 \text{ s}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$P_1 = ? \text{ (W)}$$

$$P_2 = ? \text{ (W)}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} \Rightarrow$$

$$P = \frac{m \cdot g \cdot s}{t}$$

$$P_1 = \frac{60 \cdot 10 \cdot 4}{5} = 480$$

$$\underline{\underline{P_1 = 480 \text{ W}}}$$

$$P_2 = \frac{72 \cdot 10 \cdot 4}{6} = 480$$

$$\underline{\underline{P_2 = 480 \text{ W}}}$$

Oba chlapci šplhají se stejným výkonem.

- 17) Automobil o hmotnosti 3 000 kg se pohybuje stálou rychlostí 40 km·h⁻¹ po vodorovné silnici. Určete výkon jeho motoru, je-li součinitel tření 0,06.

$$m = 3\,000 \text{ kg}$$

$$v = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 11,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$f = 0,06$$

$$P = ? (\text{W})$$

Automobil se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, tažná a třecí síla mají stejnou velikost ($F = F_t$) $\Rightarrow$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = f \cdot F_G \cdot v \Rightarrow$$

$$P = f \cdot m \cdot g \cdot v$$

$$P = 0,06 \cdot 3000 \cdot 9,81 \cdot 11,11 = 19\,618,04$$

$$\underline{\underline{P = 19\,618,04 \text{ W} \doteq 20 \text{ kW}}}$$

Výkon motoru je přibližně 20 kW.

- 18) Jakou práci vykoná zařízení s výkonem 2,5 kW za 3 hodiny? Výsledek vyjádřete v joulech a kWh.
-

$$P = 2,5 \text{ kW} = 2\,500 \text{ W}$$

$$T = 3 \text{ hod} = 10\,800 \text{ s}$$

$$W = ?(\text{J})$$

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow$$

$$W = P \cdot t$$

$$W = 2500 \cdot 10800 = 27\,000\,000$$

$$\underline{\underline{W = 27\,000\,000 \text{ J} = 27 \text{ MJ}}}$$

$$J = Ws \Rightarrow 1 \text{ kWh} = 1\,000 \text{ Wh} = 1\,000 \cdot 3600 = 3\,600\,000 \text{ J} \Rightarrow$$

$$1 \text{ J} = \frac{1}{3\,600\,000} \text{ kWh}$$

$$27\,000\,000 \cdot \frac{1}{3\,600\,000} = 7,5$$

$$\underline{\underline{27 \text{ MJ} = 7,5 \text{ kWh}}}$$

Zařízení vykoná práci o velikosti 27 MJ, neboli 7,5 kWh.

- ❖ Kvádř o hmotnosti 5 kg posunujeme rovnoměrným pohybem vzhůru po nakloněné rovině do vzdálenosti 2 m. Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° . Součinitel smykového tření je 0,2. Určete práci, kterou při tom vykonáme. Počítejte i pro případ, kdybychom uvažovali pohyb kvádru bez tření, tj. na dokonale hladké rovině.

$$m = 5 \text{ kg}$$

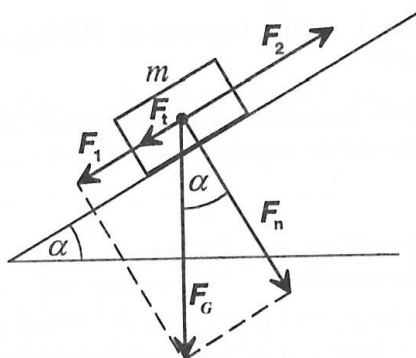
$$s = 2 \text{ m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$f = 0,2$$

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$



Na kvádř působí tíhová síla F_G , kterou rozložíme na dvě navzájem kolmé složky – sílu F_1 , která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, a sílu F_n , kolmou k nakloněné rovině. Na kvádř působíme silou F_2 , která při pohybu koná práci. Proti pohybu působí třecí síla F_t .

$$F_G = m \cdot g$$

$$F_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$F_t = f \cdot F_n = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Aby se kvádř mohl pohybovat rovnoměrným pohybem směrem vzhůru, musí platit $F_2 = F_1 + F_t \Rightarrow$

$$F_2 = m \cdot g \cdot \sin \alpha + f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = m \cdot g (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$$

$$W = F_2 \cdot s \Rightarrow$$

$$W = m \cdot g \cdot s \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$$

$$W = 5 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot (\sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ) = 66,04$$

$$\underline{\underline{W = 66,04 \text{ J}}}$$

Při přemístění kvádru vykonáme práci 66,04 J.

V případě pohybu kvádru bez tření je $f = 0 \Rightarrow$

$$W = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha$$

$$W = 5 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 49,05$$

$$\underline{\underline{W = 49,05 \text{ J}}}$$

Při přemístění kvádru bez tření vykonáme práci 49,05 J.

- ❖ Na těleso o hmotnosti 500 kg ležící na vodorovné rovině působí ve vodorovném směru stálá síla. Jakou práci tato síla vykoná, dosáhne-li těleso na konci dvacetimetrové dráhy rychlosti $1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? Součinitel tření mezi tělesem a podložkou je 0,01. $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$m = 500 \text{ kg}$$

$$s = 20 \text{ m}$$

$$v = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$f = 0,01$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$W = ?(\text{J})$$

Na těleso působí ve směru pohybu síla F , proti směru pohybu síla F_t (třecí) a jejich výslednice uděluje danému tělesu zrychlení a .

Podle 2. Newtonova pohybového zákona platí:

$$F - F_t = ma \Rightarrow F = ma + F_t \Rightarrow \mathbf{F = ma + fmg}$$

$$\text{Pohyb tělesa je rovnoměrně zrychlený} \Rightarrow v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a} \text{ a } s = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2}a \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

$$W = F \cdot s = (ma + fmg)s = \left(m \frac{v^2}{2s} + fmg\right)s \Rightarrow$$

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}mv^2 + fmg}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 1,2^2 + 0,01 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 20 = 1360$$

$$\mathbf{W = 1360 \text{ J}}$$

Síla vykoná práci o velikosti 1360 J.

- ❖ Dělník naložil na nákladní auto písek o objemu 4 m^3 . Na lopatu nabral průměrně písek o objemu 3 dm^3 a házel jej do výšky $2,4 \text{ m}$. Průměrná hustota písku je $2\,600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- a) Jakou práci vykonal?
- b) Jakou práci by vykonal, kdyby pokaždé na lopatu průměrně nabral písek o objemu je 2 dm^3 ?

$$V_C = 4 \text{ m}^3$$

$$V_{L1} = 3 \text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$h = s = 2,4 \text{ m}$$

$$\rho = 2\,600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$V_{L2} = 2 \text{ dm}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

$$W = ? \text{ (J)}$$

$$W' = F \cdot s = m \cdot g \cdot s = \rho \cdot V_L \cdot g \cdot s \quad \dots\dots\dots \text{práce při nabrání a hození jedné lopaty}$$

$$W = \rho \cdot V_L \cdot g \cdot s \cdot n \quad \dots\dots\dots \text{celková práce}$$

Dělník při nabrání $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ písku musel lopatu „použít“ přibližně 1333

$$\text{krát } (4: 3 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow n = 1333,33$$

$$W = 2\,600 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 2,4 \cdot 1333,33 = 244\,856,99$$

$$\underline{\underline{W = 244\,856,99 \text{ J} \doteq 245 \text{ kJ}}}$$

Dělník vykonal práci 245 kJ.

Dělník při nabrání $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ písku musel lopatu „použít“ 2 000 krát (4:

$$2 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow n = 2\,000$$

$$W = 2\,600 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 2,4 \cdot 2\,000 = 244\,857,6$$

$$\underline{\underline{W = 244\,857,6 \text{ J} \doteq 245 \text{ kJ}}}$$

Dělník vykonal práci 245 kJ.

Poznámka: Vykonaná práce je v obou případech stejná, protože nezáleží na tom, kolikrát se písek nabere na lopatu, ale jaký celkový objem písku se přemísťuje $\Rightarrow W = F \cdot s = m \cdot g \cdot s = \rho \cdot V_C \cdot g \cdot s \Rightarrow$

$$W = 2\,600 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 2,4 = 244\,857,6 \Rightarrow \underline{\underline{W = 245 \text{ kJ}}}$$

- ❖ Střela o hmotnosti 20 g zasáhla strom a pronikla do hloubky 10 cm. Jak velkou rychlostí se pohybovala před zásahem, je-li průměrná odporová síla dřeva stromu 4 kN?

$$m = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$$

$$s = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$F = 4 \text{ kN} = 4\,000 \text{ N}$$

$$v = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

Při vniknutí střely do stromu překonává střela odporovou sílu stromu po dráze s , přičemž vykoná mechanickou práci $W = F \cdot s$, tato práce se koná na úkor kinetické energie střely $E_K = \frac{1}{2}mv^2$.

$$W = E_K$$

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2 \cdot F \cdot s = m \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot F \cdot s}{m} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 0,1}{0,02}} = 200$$

$$\underline{\underline{v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Rychlost střely před zásahem byla $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- ❖ Jaký příkon musí mít elektromotor čerpadla, které vyčerpá za 4 s vodu o objemu 100 l do výšky 20 m? Hustota vody je $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$$t = 4 \text{ s}$$

$$V = 100 \text{ l} = 0,1 \text{ m}^3$$

$$h = s = 20 \text{ m}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$P_0 = ? \text{ (W)}$$

Příkon motoru musí být vždy větší než užitečný výkon elektroměru $\Rightarrow$

$$\text{účinnost} \dots \eta = \frac{P}{P_0} \Rightarrow P_0 > P$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F_G \cdot s}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \Rightarrow$$

$$P = \frac{\rho \cdot V \cdot g \cdot h}{t}$$

$$P = \frac{1000 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 20}{4} = 5000$$

$$P = 5000 \text{ W}$$

$$\underline{P_0 > 5000 \text{ W}}$$

Příkon elektromotoru musí být větší než 5000 W.

NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

1) Jak velkou gravitační silou se přitahují Země a Slunce?

$$M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$

$$F_g = ? \text{ (N)}$$

$$F_g = \kappa \cdot \frac{M_S \cdot M_Z}{r^2}$$

$$F_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} = 3,56 \cdot 10^{22}$$

$$\underline{\underline{F_g = 3,56 \cdot 10^{22} \text{ N}}}$$

Slunce a Země se přitahují gravitační silou o velikosti $3,56 \cdot 10^{22} \text{ N}$.

- 2) Vypočítejte hmotnost a průměrnou hustotu Země, víte-li, že na těleso o hmotnosti 1 kg působí na povrchu Země gravitační síla přibližně 9,8 N.
-

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$F_g = 9,8 \text{ N}$$

$$R_Z = 6378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$M_Z = ? \text{ (kg)}$$

$$\rho = ? \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$$

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} \Rightarrow F_g \cdot R_Z^2 = \kappa \cdot m \cdot M_Z \Rightarrow$$

$$M_Z = \frac{F_g \cdot R_Z^2}{\kappa \cdot m}$$

$$M_Z = \frac{9,8 \cdot (6,378 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1} = 5,98 \cdot 10^{24}$$

$$\underline{\underline{M_Z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}$$

Hmotnost Země je $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

- 3) Vzdálenost Uranu od Slunce je přibližně 20krát větší než vzdálenost Země od Slunce. Hmotnost Uranu je přibližně 14krát větší než hmotnost Země. Určete poměr sil, kterými Slunce přitahuje Uran a Zemi.

$$r_{US} = 20r_{ZS}$$

$$m = 14M_Z$$

$$\frac{F_{gUS}}{F_{gZS}} = ? \text{ (N)}$$

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\frac{F_{gUS}}{F_{gZS}} = \frac{\kappa \cdot \frac{M_S \cdot m_U}{(r_{US})^2}}{\kappa \cdot \frac{M_S \cdot M_Z}{(r_{ZS})^2}} = \frac{\frac{m_U}{(r_{US})^2}}{\frac{M_Z}{(r_{ZS})^2}} \Rightarrow \frac{m_U \cdot (r_{ZS})^2}{M_Z \cdot (r_{US})^2}$$

$$\frac{F_{gUS}}{F_{gZS}} = \frac{m_U \cdot (r_{ZS})^2}{M_Z \cdot (r_{US})^2}$$

$$\frac{F_{gUS}}{F_{gZS}} = \frac{14M_Z \cdot (r_{ZS})^2}{M_Z \cdot (20r_{ZS})^2} = \frac{14 \cdot (r_{ZS})^2}{400 \cdot (r_{ZS})^2} = \frac{14}{400} = \frac{7}{200}$$

$$\frac{F_{gUS}}{F_{gZS}} = \frac{7}{200}$$

Poměr sil, kterými Slunce přitahuje Uran a Zemi je 7 : 200.

- 4) Určete gravitační sílu, která působí na těleso o hmotnosti 16 kg, jestliže se nachází nad povrchem Země ve výšce, která se rovná $\frac{1}{3}R_Z$. Gravitační zrychlení u povrchu Země je přibližně $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$m = 16 \text{ kg}$$

$$h = \frac{1}{3}R_Z$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$F_{g(\frac{1}{3}h)} = ? \text{ (N)}$$

Podle gravitačního zákona působí na těleso na povrchu Země gravitační síla

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Ve výšce } h \text{ nad Zemí je tato síla rovna } F_{gh} = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(R_Z + h)^2} \cdot \dots \dots \dots (2)$$

Ve výšce $h = \frac{1}{3}R_Z$ nad Zemí je tato síla rovna

$$F_{g(\frac{1}{3}h)} = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(R_Z + \frac{1}{3}R_Z)^2} = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(\frac{4}{3}R_Z)^2} \cdot \dots \dots \dots (3)$$

Vydělením rovnic (3) a (1) dostaneme po úpravách

$$\frac{F_{g(\frac{1}{3}h)}}{F_g} = \frac{\kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(\frac{4}{3}R_Z)^2}}{\kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2}} = \frac{\kappa \cdot m \cdot M_Z \cdot R_Z^2}{\kappa \cdot m \cdot M_Z \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot R_Z^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$F_{g(\frac{1}{3}h)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot F_g = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot m \cdot g$$

$$F_{g(\frac{1}{3}h)} = \frac{9}{16} \cdot 16 \cdot 10 = 90$$

$$\underline{\underline{F_{g(\frac{1}{3}h)} = 90 \text{ N}}}$$

Na těleso o hmotnosti 16 kg působí ve výšce $\frac{1}{3}R_Z$ gravitační síla 90 N.

POHYBY V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

- 5) Chlapec vystřelil prakem svisle vzhůru kámen rychlostí $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete
- velikost okamžité rychlosti kamene za dobu 1 s od počátku pohybu;
 - okamžitou výšku kamene za dobu 1 s od počátku pohybu;
 - do jaké největší výšky od místa vystřelení kámen vystoupí.

$$v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v = ? (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$h = ? (\text{m})$$

$$h_{\text{max}} = ? (\text{m}) \dots \text{výška výstupu}$$

Jedná se o vrh svislý vzhůru, proto

$$v = v_0 - gt$$

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow v = 20 - 10 \cdot 1 = 10$$

$$\underline{\underline{v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Za 1 s bude rychlost kamene $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 20 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 = 15$$

$$\underline{\underline{h = 15 \text{ m}}}$$

Okamžitá výška kamene za 1 s bude 15 m.

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h_{\text{max}} = \frac{20^2}{2 \cdot 10} = 20$$

$$\underline{\underline{h_{\text{max}} = 20 \text{ m}}}$$

Kámen vystoupí do maximální výšky 20 m.

- 6) Míč vržený svisle vzhůru se vrátil na zem za dobu 4 s. Do jaké výšky vystoupil?

$$t = 4 \text{ s}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$h = ? \text{ (m)}$$

Zadaný čas není doba výstupu, ale součet doby výstupu a sestupu ($\uparrow \downarrow$) !!!

$$\Rightarrow t_{\max} = 2 \text{ s.}$$

Dobu výstupu určujeme podle vzorce: $t_{\max} = \frac{v_0}{g} \Rightarrow v_0 = g \cdot t_{\max}$,

dosadíme do vzorce pro výšku výstupu $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(g \cdot t_{\max})^2}{2g} = \frac{g^2 \cdot t_{\max}^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h_{\max} = \frac{g \cdot t_{\max}^2}{2}$$

$$h_{\max} = \frac{10 \cdot 2^2}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\underline{\underline{h_{\max} = 20 \text{ m}}}$$

Míč vystoupil do výšky 20 m.

- 7) Jakou rychlostí vystupuje proud vody z požární hadice směrem svisle vzhůru, jestliže dosahuje výšky 16 m od ústí hadice?
-

$$h_{\max} = 16 \text{ m}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

Jedná se o vrh svislý vzhůru, rychlost vypočítáme ze vzorce pro výšku

$$\text{výstupu: } h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v_0^2 = h_{\max} \cdot 2g \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{2h_{\max}g}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot 10} = \sqrt{320} = 17,88$$

$$\underline{\underline{v_0 = 17,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Proud vody vystupuje rychlostí 17,88 m·s⁻¹.

- 8) Dvě tělesa byla vržena svisle vzhůru různými počátečními rychlostmi; přitom první těleso dosáhlo čtyřikrát větší výšky výstupu než druhé. Vypočítejte, kolikrát je počáteční rychlost prvního tělesa větší než druhého.
-

$$h_{\max 1} = 4h_{\max 2}$$

$$\frac{v_{01}}{v_{02}} = ?$$

$$\text{Pro výšky vrhu obou těles platí: } h_{\max 1} = \frac{v_{01}^2}{2g} \text{ a } h_{\max 2} = \frac{v_{02}^2}{2g}.$$

Po dosazení do rovnice $h_{\max 1} = 4h_{\max 2}$ dostáváme

$$\frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{4v_{02}^2}{2g}, \text{ po úpravě}$$

$$v_{01} = 2v_{02}.$$

První těleso bylo vrženo svisle vzhůru dvakrát větší rychlostí než druhé.

POHYBY V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI

- 9) Země se pohybuje kolem Slunce přibližně po kružnici o poloměru $1,5 \cdot 10^8$ km rychlostí $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete hmotnost Slunce.

$$r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$v = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 3 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$\underline{\underline{M_S = ? \text{ (kg)}}}$$

Podle gravitačního zákona je Země o hmotnosti M_Z přitahována k Slunci o hmotnosti M_S gravitační silou $F_g = \kappa \cdot \frac{M_S \cdot M_Z}{r^2}$, která uděluje Zemi dostředivé zrychlení $a_d = \frac{v^2}{r}$.

Gravitační sílu můžeme vyjádřit také pomocí 2. pohybového zákona: $F_g = M_Z \cdot a_d$.

Porovnáním obou vztahů dostáváme:

$$\kappa \cdot \frac{M_S \cdot M_Z}{r^2} = M_Z \cdot a_d \Rightarrow \kappa \cdot \frac{M_S \cdot M_Z}{r^2} = M_Z \cdot \frac{v^2}{r}$$

Po odstranění zlomků a jednoduché úpravě můžeme vyjádřit hledanou hmotnost Slunce:

$$M_S = \frac{rv^2}{\kappa}$$

$$M_S = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \cdot (3 \cdot 10^4)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,023 \cdot 10^{30}$$

$$\underline{\underline{M_S = 2,02 \cdot 10^{30} \text{ kg}}}$$

Hmotnost Slunce je $2,02 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

- 10) Určete velikost rychlosti Měsíce, který opisuje kolem Země kružnici o poloměru 384 000 km.

$$h = 384\,000\text{ km} = 384 \cdot 10^6\text{ m}$$

$$M_Z = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$$

$$R_Z = 6378 \cdot 10^3\text{ m}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$v_k = ?\text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

rychlost po kružnici = kruhová rychlost

Kruhovou rychlost na povrchu Země vyjádříme podle vztahu $v_k = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z}}$, ve

výšce h nad povrchem Země $v_k = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}$

$$v_k = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{384 \cdot 10^6 + 6378 \cdot 10^3}} = 1012,50$$

$$\underline{\underline{v_k = 1012,50\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Rychlost Měsíce je **1012,5 m·s⁻¹**.

- 11) Určete dobu oběhu družice, která se pohybuje ve výšce rovné polovině poloměru Země, víte-li že kruhová rychlost při povrchu Země je $7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$v_{kp} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$h = \frac{1}{2} R_Z$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$R_Z = 6378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\underline{T = ? \text{ (s)}}$$

Pro kruhovou rychlost při povrchu Země platí: $v_{kp} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z}}$, pro

kruhovou rychlost ve výšce h : $v_k = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}} \Rightarrow$

$$\frac{v_k}{v_{kp}} = \frac{\sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}}{\sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z}}} = \sqrt{\frac{R_Z}{R_Z + h}} = \sqrt{\frac{R_Z}{R_Z + \frac{1}{2} R_Z}} = \sqrt{\frac{R_Z}{\frac{3}{2} R_Z}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$v_k = \sqrt{\frac{2}{3}} v_{kp}$$

Oběžnou dobu vypočítáme podle vztahu

$$T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v_k} \quad (\text{odvození v příkladu výše})$$

$$T = \frac{2\pi\left(R_Z + \frac{1}{2} R_Z\right)}{v_k} = \frac{3\pi R_Z}{v_k} \Rightarrow$$

$$T = \frac{3\pi R_Z}{\sqrt{\frac{2}{3}} v_{kp}}$$

$$T = \frac{3 \cdot 3,14 \cdot 6,378 \cdot 10^6}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 7,9 \cdot 10^3} = 9314,38$$

$$\underline{T = 9314,38 \text{ s} = 155 \text{ min}}$$

Oběžná doba družice je 155 minut.

- 12) Doba oběhu Marsu kolem Slunce je přibližně 1,9 roku. Určete jeho střední vzdálenost od Slunce.

$$T_1 = 1,9 \text{ let}$$

$$T_2 = 1 \text{ rok}$$

$$a_2 = 1 \text{ AU}$$

$$a_1 = ? \text{ (AU)}$$

Pro výpočet střední vzdálenosti od Slunce využijeme 3. Keplerův zákon, využijeme přitom hodnoty oběžné doby Země a střední vzdálenost Země od Slunce.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$a_1^3 = \frac{a_2^3 \cdot T_1^2}{T_2^2}$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{a_2^3 \cdot T_1^2}{T_2^2}} \Rightarrow$$

$$a_1 = a_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}}$$

$$a_1 = 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,9^2}{1^2}} = 1,534$$

$$\underline{\underline{a_1 = 1,534 \text{ AU}}}$$

- 13) Vypočítejte hmotnost Země, je-li úniková rychlost z povrchu Země $11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$?

$$v_p = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 11\,200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$R_Z = 6378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_Z = (\text{kg})$$

Pro objekty pohybující se kolem Země platí, že úniková a kruhová rychlost jsou ve vzájemném vztahu: $v_p = v_k \cdot \sqrt{2} \Rightarrow v_k = \frac{v_p}{\sqrt{2}}$.

Kruhovou rychlost můžeme vyjádřit i jinak: $v_k = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z}}$.

Oba vztahy pro kruhovou rychlost můžeme porovnat $\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z}} = \frac{v_p}{\sqrt{2}}$$

Po matematických úpravách vyjádříme M_Z :

$$\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z} = \frac{v_p^2}{2} \Rightarrow$$

$$M_Z = \frac{R_Z \cdot v_p^2}{2 \cdot \kappa}$$

$$M_Z = \frac{6,378 \cdot 10^6 \cdot 11\,200^2}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,997 \cdot 10^{24}$$

$$\underline{\underline{M_Z = 5,997 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}$$

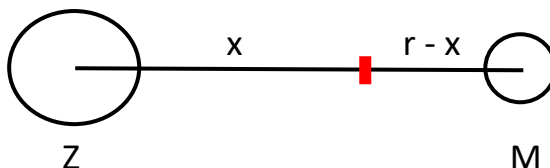
Hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

- ❖ Měsíc obíhá kolem Země ve střední vzdálenosti $r = 60R_Z$. Hmotnost Měsíce $M_M = \frac{1}{81}M_Z$. Na spojnici středů obou těles najděte místo, v němž jsou přitažlivé síly, kterými působí na těleso Země a Měsíc, stejně velké.

$$R = 60 R_Z$$

$$M_M = \frac{1}{81}M_Z$$

$$x = ? \text{ (m)}$$



$$F_{gZ} = F_{gM}$$

(červeně je naznačeno místo, kde $F_{gZ} = F_{gM}$)

$$\kappa \frac{m \cdot M_Z}{x^2} = \kappa \frac{m \cdot M_M}{(r - x)^2}$$

$$\frac{M_Z}{x^2} = \frac{\frac{1}{81}M_Z}{(60R_Z - x)^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{81 \cdot (60R_Z - x)^2}$$

$$x^2 = 81 \cdot (60R_Z - x)^2$$

$$x_1 = 9 \cdot (60R_Z - x_1) = 540R_Z - 9x_1 \Rightarrow 10x_1 = 540R_Z \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 = 54R_Z}$$

$$x_2 = -9 \cdot (60R_Z - x_2) = -540R_Z + 9x_2 \Rightarrow -8x_2 = -540R_Z \Rightarrow$$

$$\underline{x_2 = 67,5R_Z}$$

Místo, kde jsou přitažlivé síly působící na těleso ze Země a Měsíce stejně velké, se nachází ve vzdálenosti $54 R_Z$ nebo $67,5 R_Z$ od středu Země.

Výsledek také můžeme vyjádřit pouze jako číselnou hodnotu:

$$R_Z = 6378 \text{ km} = 6\,378\,000 \text{ m}$$

$$x_1 = 54R_Z = 54 \cdot 6\,378\,000 = 344\,412\,000 \Rightarrow x_1 = 344\,412\,000 \text{ m}$$

$$\underline{x_1 = 3,44 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

$$x_2 = 67,5R_Z = 67,5 \cdot 6\,378\,000 = 430\,515\,000 \Rightarrow x_2 = 430\,515\,000 \text{ m}$$

$$\underline{x_2 = 4,31 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

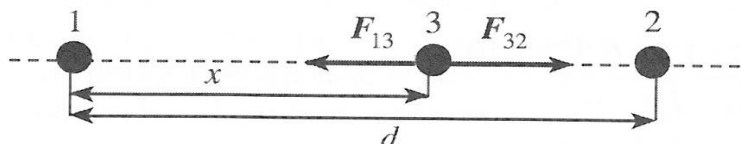
- ❖ Dvě kuličky o hmotnostech 0,01 kg a 0,04 kg se nacházejí ve vzdálenosti 1,2 m. Umístěte na přímku procházející oběma kuličkami třetí kuličku tak, aby výslednice gravitačních sil působících na tuto třetí kuličku byla nulová. Určete vzdálenost třetí kuličky od lehčí kuličky.

$$m_1 = 0,01 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0,04 \text{ kg}$$

$$d = 1,2 \text{ m}$$

$$x = ? \text{ (m)}$$



Výslednice gravitačních sil bude nulová, budou-li gravitační síly mezi první a třetí kuličkou a druhou a třetí kuličkou stejně veliké, ale opačného směru: $F_{g13} = F_{g23}$.

Z Newtonova gravitačního zákona platí:

$$F_{g13} = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{x^2}$$

$$F_{g23} = \kappa \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{(d - x)^2}$$

Porovnáním obou rovnic $\kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{x^2} = \kappa \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{(d - x)^2}$ a po úpravě dostaneme

$$m_1 \cdot (d - x)^2 = m_2 \cdot x^2.$$

Řešíme danou kvadratickou rovnici:

$$m_1 \cdot (d^2 - 2dx + x^2) = m_2 \cdot x^2$$

$$m_1 d^2 - 2m_1 dx + m_1 x^2 = m_2 \cdot x^2$$

$$m_1 d^2 - 2m_1 dx + m_1 x^2 - m_2 \cdot x^2 = 0$$

$$(m_1 - m_2)x^2 - 2m_1 dx + m_1 d^2 = 0$$

Pro zjednodušení výpočtu dosadíme zadané hodnoty a dostaneme rovnici:

$$(0,01 - 0,04)x^2 - 2 \cdot 0,01 \cdot 1,2 \cdot x + 0,01 \cdot (1,2)^2 = 0$$

$$0,03x^2 + 0,024x - 0,0144 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,024 \pm \sqrt{0,024^2 + 4 \cdot 0,03 \cdot 0,0144}}{2 \cdot 0,03}$$

Jejím řešením jsou dva kořeny: $x_1 = 0,4$ a $x_2 = -1,2$. Kořen x_2 můžeme vyloučit, protože délka nám nemůže vyjít záporná.

$$\underline{\underline{x_1 = 0,4 \text{ m}}}$$

Třetí kuličku je nutné umístit mezi první dvě do vzdálenosti 0,4 m od kuličky s hmotností 0,01 kg.

- ❖ Družice se pohybuje kolem Země po kružnici, jejíž poloměr je dvakrát větší než poloměr Země. Určete rychlost, kterou se tato družice pohybuje, jestliže první kosmická rychlost u povrchu Země je $8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$r = 2R_Z$$

$$v_k = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = ? (\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$$

Platí 2. Newtonův pohybový zákon a Newtonův gravitační zákon:

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} \dots\dots\dots \text{gravitační síla působící na družici ve výšce } R_Z$$

(Newtonův grav. zákon) ... (1)

$$F_g = m \cdot a_d \dots\dots\dots \text{gravitační síla působící na družici vyjádřená pomocí 2.}$$

Newtonova pohybového zákona ... (2)

$$a_d = \frac{v_k^2}{R_Z} \dots\dots\dots \text{dostředivé zrychlení}$$

Porovnáním rovnic (1) +(2) a dosazením dostředivého zrychlení dostaneme:

$$\kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} = m \cdot \frac{v_k^2}{R_Z} \Rightarrow$$

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}}$$

Analogicky platí pro družici, která se pohybuje po kružnici, jejíž poloměr je dvakrát větší než poloměr R_Z :

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{2R_Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}} \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} v_k$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 = 5,66$$

$$\underline{\underline{v = 5,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Rychlost družice pohybující se ve výšce rovné dvojnásobku poloměru Země je $5,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

- ❖ Družice Země se pohybuje po kružnici rychlostí $7,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vypočítejte její výšku nad zemským povrchem, oběžnou dobu a dostředivé zrychlení.

$$v_k = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$R_Z = 6378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$h = ? \text{ (m)}$$

$$T = ? \text{ (s)}$$

$$a_d = ? \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

Kruhovou rychlost počítáme podle vztahu:
$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}$$

Pomocí jednoduchých matematických úprav vyjádříme vztah pro výšku:

$$v_k^2 = \frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h} \Rightarrow v_k^2 (R_Z + h) = \kappa \cdot M_Z \Rightarrow v_k^2 R_Z + v_k^2 h = \kappa \cdot M_Z \Rightarrow$$

$$h = \frac{\kappa \cdot M_Z - v_k^2 R_Z}{v_k^2}$$

$$h = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} - (7,5 \cdot 10^3)^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6}{(7,5 \cdot 10^3)^2} = 736\,668,4$$

$$\underline{\underline{h = 736\,668,4 \text{ m} = 737 \text{ km}}}$$

Výška družice nad Zemí je 737 km.

Dostředivé zrychlení vypočítáme $a_d = \frac{v^2}{r} \Rightarrow$

$$a_d = \frac{v_k^2}{R_Z + h}$$

$$a_d = \frac{(7,5 \cdot 10^3)^2}{6,378 \cdot 10^6 + 736\,668,4} = 7,906$$

$$\underline{\underline{a_d = 7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}}$$

Družice se pohybuje s dostředivým zrychlením $7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Družice se pohybuje po kružnici, pro výpočet její periody využijeme vztah pro obvodovou rychlost tělesa pohybujícího se právě po kružnici, tzn.

$$v = 2\pi r f \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi(R_Z + h)}{T}$$

$$T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v}$$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (6,378 \cdot 10^6 + 736668,4)}{7,5 \cdot 10^3} = 5957,349$$

$$\underline{\underline{T = 5957,35 \text{ s} = 99,29 \text{ min}}}$$

Oběžná doba družice je 99,29 minut.

- ❖ V jaké výšce nad povrchem Země obíhá stacionární družice, která je stále nad tímž místem rovníku?

$T = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ oběžná doba družice je stejná jako oběžná doba Země

$$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$R_Z = 6378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$h = ? \text{ (m)}$$

h výška družice nad povrchem Země $\Rightarrow$ za dobu T opíše dráhu

$$2\pi(R_Z + h) \Rightarrow \text{její rychlost bude } v = \frac{2\pi(R_Z + h)}{T}$$

Družice obíhá kolem Země po kružnici $\Rightarrow$ její rychlost můžeme vyjádřit jako

$$\text{rychlost kruhovou: } v_k = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}$$

$$\text{Obě rovnice můžeme porovnat: } \frac{2\pi(R_Z + h)}{T} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}$$

Z dané rovnice pomocí matematických úprav vyjádříme h :

$$\left(\frac{2\pi(R_Z + h)}{T}\right)^2 = \frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h} \Rightarrow \frac{4\pi^2(R_Z + h)^2}{T^2} = \frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h} \Rightarrow$$

$$4\pi^2(R_Z + h)^3 = \kappa \cdot M_Z \cdot T^2 \Rightarrow$$

$$(R_Z + h)^3 = \frac{\kappa \cdot M_Z \cdot T^2}{4\pi^2} \Rightarrow R_Z + h = \sqrt[3]{\frac{\kappa \cdot M_Z \cdot T^2}{4\pi^2}} \Rightarrow$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa \cdot M_Z \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_Z$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 86\,400^2}{4 \cdot 3,14^2}} - 6,378 \cdot 10^6 = 35\,933\,825,27$$

$$\underline{\underline{h = 35\,933\,825,27 \text{ m} = 35\,934 \text{ km}}}$$

Družice obíhá kolem Země ve výšce 35 934 km.