

Cvičné maturitní úlohy

1. Řeš v R : $|2x - 7| - |5 - 3x| = -8$
2. Řeš v R : $|3x + 1| - |x - 2| < 7$
3. Řeš v R : $\frac{x-2}{x-3} + \frac{15}{x(x-3)} = \frac{6}{x-3} - \frac{3}{2}$
4. Řeš v R : $\frac{3}{x-1} < \frac{5}{x+1}$
5. Jeden kořen kvadratické rovnice $21x^2 + bx - 12 = 0$ je $-\frac{3}{7}$. Určete parametr $b \in R$ a druhý kořen.
6. Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů rovnice $x^2 - 6x + 8 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.
7. Řeš v R : $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$
8. Řeš v R pomocí substituce: $\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x + 7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + 7}} = 4$
9. Řeš v R rovnici s parametrem p : $\frac{p^2 \cdot (x-1)}{px-2} = 2$
10. Určete parametr $m \in R$ tak, aby rovnice $(m - 1) \cdot x^2 - (m - 2) \cdot x + 2m - 1 = 0$ měla alespoň jeden reálný kořen.
11. Určete, která celá nezáporná čísla vyhovují nerovnici: $\frac{x+4}{5-x} \geq \frac{3-x}{x+3}$
12. Řeš v R : $-2x^2 - 5x + 12 > 0$
13. Urči definiční obor funkce $f: y = \sqrt{\log_2 \left(\frac{1-2x}{x-1} + 4 \right)}$
14. Urči definiční obor funkce $f: y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}$
15. Urči, zda je funkce $f: y = (x^2 - 1) \cdot \frac{\cos x}{\sin 2x}$ sudá nebo lichá.
16. Načrtni graf funkce $f: y = \left| \frac{x-7}{x+5} \right|$ a popiš její vlastnosti.
17. Urči definiční obor, obor hodnot, souřadnice středu, průsečíky s osou x a y a načrtni graf funkce $f: y = \frac{2x+1}{x-3}$
18. Nakresli graf funkce $f: y = \left| \frac{x+1}{x-2} \right|$ a urči intervaly monotónnosti.
19. Nakresli graf funkce: $f: y = |x + 1| - |3 - x| + 2$
20. Nakresli graf funkce: $f: y = |x + 2| - 3$
21. Urči všechny hodnoty parametru $p \in R$ tak, aby daná funkce byla klesající. $y = \left(\frac{p-1}{3p} \right)^x$
22. Vypočítej: $\log^2 2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 - \log 1$
23. Načrtni graf funkce $f: y = |\log_2(x + 4) - 1|$
24. Řeš v R : $\log_5 \sqrt{3x - 2} + \log_5 \sqrt{4x - 7} = \log_5 13$
25. Řeš v R : $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$
26. Jaká je délka strany rovnostranného trojúhelníku, jehož obsah je roven obsahu trojúhelníku s délkami stran 7 cm, 10 cm a 11 cm?
27. Na těleso působí v jednom bodě dvě síly $F_1 = 40$ N a $F_2 = 70$ N, které svírají úhel 50° . Urči velikost výslednice F a úhel, který svírají síly F a F_1 .
28. V pravoúhlém trojúhelníku je dána délka přepony $c = 26$ cm a poměr odvěsen $a : b = 12 : 5$. Vypočítej délky odvěsen.
29. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je délka odvěsny $a = 3$ cm a odvěsny $b = 4$ cm. Vypočítej výšku v_c , těžnici t_c a délku úsečky BP , kde P je pata výšky v_c .
30. Sestroj trojúhelník ABC , je-li dáno: $c = 8$ cm, $t_c = 4,7$ cm, $\gamma = 75^\circ$.

31. Užitím Euklidových vět sestroj úsečku o délce $\sqrt{17}$.
32. Načrtni graf funkce $f: y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$. Jaká kosinová funkce by měla stejný graf?
33. Pomocí jednotkové kružnice rozhodni, které ze dvou čísel je větší: $A = \cos 20^\circ$, $B = \cos 290^\circ$.
34. Pomocí matematické indukce dokaž, že platí: $\forall n \in \mathbb{N}: 6 | (n^3 + 5n)$
35. Dokaž užitím matematické indukce: $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
36. Řeš v R: $2 \sin^2 x - 5 \cos x + 1 = 0$
37. Řeš v R: $\sin 2x - \sin x - \operatorname{tg} x = 0$
38. Řeš v R soustavu rovnic: $x + 2y - z = 2$, $2x + y + z = 7$, $x + y + z = 6$
39. Řeš v R soustavu rovnic: $x^3 - y^3 = 28$, $x - y = 4$
40. Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Vypočítej vzdálenost bodu E od roviny $S_{EH}S_{EF}S_{AB}$.
41. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Vypočítej odchylku přímek BC a AV .
42. Do krychle o hraně délky $a = 1$ m je vepsán kužel tak, že podstava kužele je vepsána do stěny krychle. Vypočítej povrch a objem tohoto kužele.
43. Objem kužele je $V = 9\pi \cdot \sqrt{3} \text{ dm}^3$, odchylka strany kužele od roviny podstavy je $\beta = 60^\circ$. Urči obsah pláště kužele.
44. Jsou dány dvě funkce $f(x) = 3x + 1$ a $g(x) = x^2 + 3x + 2$. Vypočítej $f(g(1))$ a $g(f(1))$.
45. U funkce $y = \log_2(x + 4)$ urči definiční obor, obor hodnot, průsečíky s osami a načrtni graf. Pokud existuje k této funkci funkce inverzní, запиште tuto funkci a určete stejné vlastnosti jako u funkce $f(x)$.
46. Sestroj řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou $S_{AE}S_{BC}S_{GH}$.
47. Sestroj řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou XYZ , kde $X = S_{AD}$, $Y \in CD \wedge |DY| = 3|CY|$, $Z \in BV \wedge |BZ| = 3|VZ|$.
48. Napiš obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $P [3; -\sqrt{3}]$ a svírá s osou x úhel 120° .
49. Na přímce $2x + y + 4 = 0$ urči body, které mají od přímky $4x - 3y + 3 = 0$ vzdálenost 5.
50. Napiš obecnou rovnici roviny γ , která prochází průsečnicí rovin α , β a je kolmá na rovinu ρ , jestliže $\alpha: x - y + 1 = 0$, $\beta: 2x + y + z = 0$, $\rho: 2x + y + z + 3 = 0$
51. Je dána rovina $\rho: 2x - y + 2z - 6 = 0$. Urči odchylku přímky p od roviny ρ a odchylku rovin p a α , jestliže $p: x = 1 - 3t$, $y = 2 - 4t$, $z = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$; $\alpha: 3x + 4y - z + 2 = 0$.
52. Sestroj trojúhelník ABC , je-li dáno: $c = 8$ cm, $v_c = 1,5$ cm, $\gamma = 120^\circ$.
53. Sestroj všechny rovnoběžníky $ABCD$ (bod S je průsečík úhlopříček), je-li dáno: $b = 4$, $|BD| = f = 5$, $|\sphericalangle ASB| = 45^\circ$.
54. Je dána elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ a přímka $p: 3x - y = 0$. Určete rovnice tečen elipsy, které jsou kolmé k dané přímce.
55. Je dána elipsa $E: (x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$. Určete reálný parametr d v rovnici přímky $p: y + d = 0$ tak, aby přímka p byla tečnou elipsy.
56. Napište rovnici hyperboly, jestliže její hlavní osa je rovnoběžná s osou x , $a = 2$ a rovnice asymptot jsou $y = 2x - 6$, $y = -2x + 10$.
57. Napište rovnice všech tečen hyperboly $H: 4x^2 - y^2 = 36$, které jsou rovnoběžné s přímkou $5x - 2y + 7 = 0$.
58. Úpravou rovnice na středový tvar určete typ kuželosečky a její charakteristiky:
 a) $4x^2 + 4y^2 - 24x - 32y + 51 = 0$ b) $y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$
59. Určete rovnice tečen elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$, které mají směrnici $k = 1$.
60. Určete rovnice všech kružnic, které procházejí bodem $A [6, 9]$, mají střed na přímce $p: x + 3y - 18 = 0$ a jejich poloměr je $r = 5$.

Cvičné maturitní úlohy

61. Zjednodušte a určete podmínky, za kterých má výraz smysl: $\left(\frac{x^2+y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]$

62. Zjednodušte a určete podmínky, za kterých má výraz smysl: $\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2} \cdot d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3} \cdot \left[\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt{d^5}}{\left(\frac{3}{c^2}\right)^4}\right]^{-1}$

63. Je dáno komplexní číslo $z = \frac{5-3i}{8+2i}$. Určete jeho reálnou a imaginární část a vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru.

64. V algebraickém tvaru vyjádři číslo $z = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6}\right)$ a určete k němu také číslo sdružené.

65. Užitím Moivreovy věty vypočítej $(1 - i \cdot \sqrt{3})^5$.

66. Užitím Moivreovy věty a binomické věty odvoďte vzorec pro $\sin 3x$ a $\cos 3x$.

67. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ zjistěte, který člen rozvoje neobsahuje x .

68. Řeš v Z: $n - \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \geq -1$

69. Řeš v R: $\left(\frac{x-1}{x-3}\right) - 2 \cdot \left(\frac{x-2}{x-4}\right) = 0$

70. Řeš v C: $\left(5 - \frac{1}{i}\right) \cdot \bar{z} + 2 \cdot z = 22 \cdot i$

71. Řeš v C: $z^2 - 4 \cdot i \cdot z - 3 = 0$

72. Řeš v C a kořeny znázorni v Gaussově rovině: $x^3 - 64 \cdot i = 0$. Výsledek zapiš v algebraickém tvaru.

73. Jaký poloměr má v Gaussově rovině kružnice, na níž leží kořeny rovnice $x^3 - 1 - i = 0$?

74. Ve třídě je 15 chlapců. Údaje o jejich výšce udává následující tabulka:

Výška (cm)	160 – 164	165 – 169	170 – 174	175 – 179	180 – 184
Počet žáků	2	5	4	3	1

Vypočítejte průměrnou výšku žáka, určete modus a medián.

75. Při měření elektrického proudu byly naměřeny následující hodnoty: 250 mA, 247 mA, 251 mA, 249 mA, 252 mA, 248 mA, 251 mA, 250 mA, 251 mA, 248 mA. Vypočítejte průměrnou hodnotu proudu, směrodatnou odchylku a relativní chybu měření (variační koeficient).

76. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, Délka přepony je 30 cm. Určete délky odvěsen.

77. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je součet prvních n členů 3069. Urči n , jestliže platí $a_1 + a_5 = 51, a_2 + a_6 = 102$.

78. Řeš v R: $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n = -\frac{1}{2x}$

79. Nekonečná spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr kružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

80. Vypočítej limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+n+n^2} - \sqrt{1-n+n^2})$.

81. Vypočítej limitu funkce: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

82. Vypočítejte derivaci složené funkce $f: y = \ln(3 \sin x - 8)$.

83. Užitím definice derivace vypočtete derivaci funkce v daném bodě $x_0: y = x^2 - 4x, x_0 = 1$.

84. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T . Rovnici tečny uveďte v obecném tvaru.
 $y = 2x^4 + 8x, T[-1; ?]$

85. Rovnice výchylky kmitavého pohybu je dána vztahem $y = y_m \cdot \sin(\omega t)$. Pomocí derivace odvoďte vztahy pro rychlost a zrychlení kmitavého pohybu.

86. Vyšetřete průběh funkce $f: y = 3x^3 - 12x^2 + 12x$.

Cvičné maturitní úlohy

87. Do rotačního kužele o rozměrech $r = 6$ cm, $v = 3$ cm vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce splývala s osou kužele. Určete rozměry válce.
88. Určete rozměry obdélníku tak, aby měl při daném obsahu 16 cm² minimální obvod.
89. Určete definiční obor funkce $f: y = x^2(1 - 3x^2)$ a intervaly, ve kterých je f rostoucí.
90. Urči intervaly monotónnosti a extrémy funkce $f: y = x^3 - \frac{1}{10}x^5$.
91. Vypočítejte derivaci funkce $f: y = x^7 - 7 \cos x$ a určete definiční obor funkce i její derivace.
92. Derivujte podle pravidel derivace součinu, podílu:
- $y = (x^2 - 1) \cdot \sin x$
 - $y = \frac{x^2 + 2x}{1 - x^2}$
93. Vypočítejte: $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$
94. Vypočítejte: $\int e^x \cdot \sin x dx$
95. Vypočítejte:
- $\int \left(4 + \frac{1}{x}\right) dx$
 - $\int (\cos 3x + 3x + 1) dx$
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$
96. Vypočítejte: $\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$
97. Vypočítejte: $\int x \cdot \ln x dx$
98. Nakreslete rovinný obrazec, který omezuje parabola $y = -x^2 + 4$ a osa x . Potom vypočítejte jeho obsah.
99. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního válce, který má poloměr podstavy r a výšku v .
100. Odvoďte vztah pro velikost atmosférického tlaku p v závislosti na výšce h nad hladinou moře.