Maturitní souhrn – řešené úlohy

Základní úroveň

1. ČÍSELNÉ OBORY

Př. 1. Zapište zkráceným zápisem číslo $3.10^3 + 5.10^2 + 1.10^1 + 7.10^0 =$

$= \underline{\underline{3517}}$

Př. 2. Vypočítej a výsledek uveď ve tvaru $a.10^n$, kde $a \in \langle 1;9 \rangle$

$$\frac{1,5.10^{-3} \cdot 4.10^{2}}{(3.10^{-2})^2} = \frac{6.10^{-1}}{9.10^{-4}} = \frac{2}{3}.10^3 = 0,\bar{6}.10^3 = \underline{\underline{6,\bar{6}.10^2}}$$

Př. 3. Určete $D(88,132) = 2^2.11 = 44$ – všechny společné základy s nejmenší mocninou

$n(88,132) = 2^3.3.11 = 264$ – všechny základy s nejvyšší mocninou

88	2
44	2
22	2
11	11
1	

$88 = 2^3.11$

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

$132 = 2^2.3.11$

Př. 4. Vypočtěte a výsledek zapište zlomkem v základním tvaru:

$$\frac{2}{77} - \frac{1}{63} = \frac{2.9 - 1.11}{693} = \frac{18-11}{693} = \frac{7}{693} = \underline{\underline{\frac{1}{99}}}$$

$\Rightarrow$ nejprve najdeme nejmenší společný násobek čísel 77 a 63

$77 = 7.11 \qquad 63 = 3^2.7 \qquad n(77, 63) = 3^2.7.11 = 63.11 = 693$

Př. 5. Za jak dlouho a po kolika jízdách se znovu setkají autobusy dvou linek, mají-li první 15 minutové intervaly a druhé 24 min. int?

$\Rightarrow$ úlohu převedeme na hledání $n(15, 24)$

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 3.5 \\ 24 &= 2^3.3 \end{aligned}\right\} \quad n(15,24) = 2^3.3.5 = 40.3 = 120$$

$120 : 15 = 8 \qquad 120 : 24 = 5$

Autobusy se setkají za 120 minut. První udělá 8 jízd, druhý pouze 5.

$\boxed{\text{Př. 6.}}$ Vypočtěte a výsledek zapište zlomkem v základním tvaru

$$\frac{3\frac{2}{5}+1\frac{7}{12}+1\frac{4}{15}}{26\frac{1}{4}:4\frac{1}{5}} = \frac{\frac{17}{5}+\frac{19}{12}+\frac{19}{15}}{\frac{105}{4}:\frac{21}{5}} = \frac{\frac{204+95+76}{60}}{\frac{525}{84}} \overset{*}{=}$$

⇒ nalezneme $n(5,12,15) = 3.4.5 = 60$

$5 = 5.1$
$12 = 3.4$
$15 = 3.5$

⇒ dělení nahradíme násobením $\frac{105}{4}\cdot\frac{5}{21}$

$$\overset{*}{=} \frac{375}{60}\cdot\frac{84}{525} = \frac{75}{12}\cdot\frac{84}{525} = \frac{1}{1}\cdot\frac{7}{7} = \underline{\underline{1}}$$

⇒ zkrátíme 12 a 84
75 a 525

Př. 7. Upravte: 4)

a) $$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \overbrace{3+\sqrt{5}}^{A^2} + \overbrace{2\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}^{2.AB} + \overbrace{3-\sqrt{5}}^{B^2} \overset{*}{=}$$

⇒ použijeme vzorec $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ a zjednodušíme

$A = \sqrt{3+\sqrt{5}}$

$B = \sqrt{3-\sqrt{5}}$

$$\overset{*}{=} 6 + 2\cdot\sqrt{\underbrace{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}_{(A+B).(A-B) = A^2-B^2}} = 6+2\cdot\sqrt{9-5} = 6+2\cdot\sqrt{4} = \underline{\underline{10}}$$

b) $$5\cdot\sqrt{27} - 2\sqrt{8} - \sqrt{12} + \sqrt{32} = 5\cdot3\cdot\sqrt{3} - 2\cdot2\cdot\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4\cdot\sqrt{2} \overset{*}{=}$$

⇒ co lze, částečně odmocníme a zjednodušíme

$27 = 9.3 \quad \sqrt{27} = \sqrt{9.3} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3.\sqrt{3}$

$8 = 2.4 \quad \sqrt{8} = \sqrt{2.4} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4} = 2\cdot\sqrt{2}$

$12 = 4.3 \quad \sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{3}$

$32 = 16.2 \quad \sqrt{32} = \sqrt{16.2} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}$

$$\overset{*}{=} 15\cdot\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \underline{\underline{13\cdot\sqrt{3}}}$$

5)

c) $0{,}2^{-3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} + \left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{3-2}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \overset{*}{=}$

$\Rightarrow$ záporné exponenty převedeme na kladné podle pravidla $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\overset{*}{=} \left(\frac{10}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2 = 5^3 + (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3})^2 = 125 + 4 + 3 =$

$\underline{\underline{= 132}}$

$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$(\sqrt{2})^4 = (2^{\frac{1}{2}})^4 = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2$

d) $3 \cdot |2 - 3{,}5| + 1 - |-0{,}3 + \frac{2}{5}| = 3 \cdot |-1{,}5| + 1 - |-\frac{3}{10} + \frac{4}{10}| =$

$= 3 \cdot 1{,}5 + 1 - |\frac{1}{10}| = 5{,}5 - 0{,}1 = \underline{\underline{5{,}4}}$

2. ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

$\boxed{\text{Př. 8.}}$ Upravte výraz $\dfrac{2x^2+4x}{x^2-4}$, určete jeho hodnotu pro $x=-1$ a zjistěte nulové body výrazu.

⇒ v čitateli vytkneme $2x$

⇒ jmenovatel rozložíme podle vzorce $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$$\frac{2x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\underline{\underline{\frac{2x}{x-2}}}$$

b) hodnotu výrazu lze určit ze zadání i z upraveného výrazu: $V(-1)=\dfrac{2.(-1)}{-1-2}=\dfrac{-2}{-3}=\underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$

c) nulové body

MUSÍME URČIT ZE ZADÁNÍ !!!

zlomek $=0$ ⇔ ČITATEL $=0$

$$2x^2+4x=0$$
$$2x(x+2)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}x_1&=0\\x_2&=-2\end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Př. 9.}}$ Určete definiční obor výrazu $\dfrac{2x}{x^3+5x^2+6x}$
zapište intervalem.

$\Rightarrow$ Df je to, co můžeme dosadit za x

$\Rightarrow$ nejprve určíme, jaké NESMÍ BÝT x

$\Rightarrow$ jmenovatel se nesmí rovnat nule, určíme kdy $=0$

$$x^3+5x^2+6x=0 \iff x\underbrace{(x^2+5x+6)}_{\text{kvadratický trojčlen}}=0 \overset{*}{\iff}$$

$\Rightarrow$ zkusíme rozložit na součin

$x^2+5x+6=0$ ①

$$x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$\overset{*}{\iff} \quad x\cdot(x+2)(x+3)=0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=0\\ x_2&=-2\\ x_3&=-3 \end{aligned}\right\} \quad x\neq 0;-2;-3$$

Df:

$$\underline{\underline{x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;0)\cup(0;+\infty)}}$$

$\boxed{\text{Př.10.}}$ Rozložte v součin: 8)

a) $2(a+b)+(a+b)^2 = (a+b)\cdot[2+(a+b)] = \underline{\underline{(a+b)(a+b+2)}}$

$\Rightarrow$ před závorku

Vytkneme největší možný společný výraz $\Rightarrow (a+b)$

b) $x(a-1)-y(1-a) = x(a-1)+y(a-1) = \underline{\underline{(a-1)(x+y)}}$

stejné výrazy až na znaménko $\Rightarrow$ u jednoho vytkneme mínus

a dále jako v a)

c) $\overbrace{a^3+3a^2}^{\mathrm{I.}}+\overbrace{3a+9}^{\mathrm{II.}} = \overbrace{a^2(a+3)}^{\mathrm{I.}}+\overbrace{3(a+3)}^{\mathrm{II.}} = \underline{\underline{(a+3)(a^2+3)}}$

$\Rightarrow$ vytkneme po dvojicích

$\Rightarrow$ vytkneme stejný výraz PŘED ZÁVORKU

d) $-16u^2+9v^2 = \overbrace{9v^2}^{A^2}-\overbrace{16u^2}^{B^2} = \underline{\underline{\overbrace{(3v-4u)}^{(A-B)}\cdot\overbrace{(3v+4u)}^{(A+B)}}}$

$\Rightarrow$ vzorec $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

e) $x^3-9x = x(x^2-9) = \underline{\underline{x\cdot(x+3)(x-3)}}$

$\Rightarrow$ nejprve vytkneme x, pak vzorec A^2-B^2

$\boxed{\text{Př. 11.}}$ Upravte lomený výraz a určete jeho definiční obor:

a) $\dfrac{a^3-8}{a^2+5a-14}\cdot\dfrac{a^2-49}{2a^2+4a+8} = \dfrac{\cancel{(a-2)}\cdot(a^2+2a+4)}{\cancel{(a-2)}\cancel{(a+7)}}\cdot\dfrac{\cancel{(a+7)}(a-7)}{2(a^2+2a+4)} =$

$= \dfrac{(a-7)\cancel{(a^2+2a+4)}}{2\cancel{(a^2+2a+4)}} = \underline{\underline{\dfrac{a-7}{2}}}$

$\Rightarrow$ čitatel prvního zlomku rozložíme na součin podle vzorce
$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

$\Rightarrow$ čitatel 2. zlomku podle $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

$\Rightarrow$ jmenovatelé jsou kvadratické trojčleny
$\Rightarrow$ zkusíme rozložit na součin

$\underline{\underline{D_f: a\in\mathbb{R}-\{2;-7\}}}$

$\uparrow$
plyne z podmínky
že jmenovatel $\neq 0$

__mezivýpočty:__

$a^2+5a-14=0$

$a_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}$

$a_{1,2} \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$

$2(a^2+2a+4)=0$

$a^2+2a+4=0$

~~(a+~~

$a_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$ $\emptyset$

$\Rightarrow$ nelze rozložit

Př. 12 Upravte a výsledek uveďte v mocninném i odmocninném tvaru:

$$\frac{\left(2^{-1}\cdot\sqrt{2} : 2^{\frac{3}{4}}\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\left(2^2\right)^{-1}} = \frac{\left(2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}\right)^2}{2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-2}} = \frac{\cancel{2^{-2}}\cdot 2^{1}\cdot \frac{1}{2^{\frac{6}{4}}}}{2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot \cancel{2^{-2}}} \overset{*}{=}$$

⇒ vše převedeme na základ 2, dělení na násobení

⇒ použijeme pravidla pro počítání s mocninami:

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\overset{*}{=} \frac{2^{1}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}}{2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$= \underline{\underline{2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}}}$$

Mezivýpočty

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$1 - \frac{3}{2} =$

$= \frac{2}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$-1 + \frac{1}{3} =$

$-\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-3+4}{6} = \frac{1}{6}$

$\boxed{\text{Př. 13.}}$ Upravte a zjednodušte výraz

$$\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}-1+\frac{2}{\sqrt{2}+1}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}-\frac{2}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{2}-1+\frac{2}{(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}-\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2-1}}{\sqrt{2}-1+\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2-1}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}-2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}-2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)-2(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}-3} =$$

$$= \frac{\cancel{(\sqrt{2}-1)}\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3\cdot\cancel{(\sqrt{2}-1)}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{1}} =$$

$$= -\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

⇒ odstraníme $\sqrt{\ }$ ze jmenovatelů podle pravidla (rozšířením):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

MUSÍ VZNIKNOUT VZOREC
$(A+B)(A-B) = A^2-B^2$

⇒ upravíme, rozložíme na součin, zkrátíme

3. ROVNICE A NEROVNICE

Př. 14 Ze vzorce $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ vyjádřete ω.

⇒ na vzorec se podíváme jako na rovnici s neznámou ω

⇒ 1. VŠECHNY VÝRAZY, které NEOBSAHUJÍ ω, převedeme na opačnou stranu rovnice

$$E - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad / \cdot 2$$

2. odstraníme zlomky ⇒ celou rovnici vynásobíme 2

$$2E - mv^2 = J\omega^2 \quad / : J$$

3. celou rovnici VYDĚLÍME výrazem stojícím u ω

$$\frac{2E - mv^2}{J} = \omega^2$$

4. odmocníme OBĚ STRANY ROVNICE, zaměníme levou a pravou stranu rovnice

$$\omega = \sqrt{\frac{2E - mv^2}{J}}$$

Př. 15. Obvod △ je 104 cm. Jedna jeho strana je o 6 cm delší než druhá a o 8 cm kratší než třetí strana. Určete délky stran △.

⇒ úlohu vyřešíme SESTAVENÍM ROVNICE o 1 neznámé

⇒ označíme si jako x délku 1. strany a pomocí výrazů určíme délky 2. a 3. strany

1. --- x

2. .... $x-6$ (dle zadání je první o 6 cm delší než 2. tedy druhá je o 6 cm kratší)

3---- $x+8$ (první o 8 cm kratší ⇒ třetí je o 8 cm delší)

⇒ sečteme délky všech stran a součet musí být roven obvodu

$$x+(x-6)+(x+8)=104$$

$$3x+2=104$$

$$3x=102 \qquad \underline{\underline{x=34\,\text{cm}}}$$

1. strana --- 34 cm
2. strana --- 28 cm
3. strana --- 42 cm

Př. 16. Dvanáct dělníků vykope příkop za 15 dní. Za jak dlouho provede tutéž práci 9 dělníků?

⇒ úloha na NEPŘÍMOU ÚMĚRNOST

⇒ zapíšeme a řešíme pomocí trojčlenky, ŠIPKY OPAČNÝ SMĚR

↑ 12 ----- 15 dní ↓
9 ----- x dní

$\Rightarrow \frac{12}{9} = \frac{x}{15} \Rightarrow \frac{12 \cdot 15}{9} = x \Rightarrow \underline{\underline{x = 20 \text{ dní}}}$

Př. 17. Čerpadlo KS-20 vyčerpá bazén za 20 hodin, čerpadlo KS-15 za 15 hodin. Za jak dlouho je vyčerpán bazén, běží-li nejprve 2 hodiny čerpadlo KS-15 a zbytek času běží obě najednou?

⇒ úloha na SPOLEČNOU PRÁCI

⇒ zvolíme si neznámou t jako počet hodin kdy běží čerpadlo KS-15

KS-20:

20 hodin --- 1 bazén

1 hodina --- $\frac{1}{20}$ bazénu

běží o 2 hodiny méně ⇒ $(t-2)$ ... $\frac{(t-2)}{20}$ bazénu

KS-15:

15 hodin --- 1 bazén

1 hodinu --- $\frac{1}{15}$ bazénu

t hodin --- $\frac{t}{15}$ bazénu

⇒ sestavíme rovnici

$$\frac{t}{15} + \frac{(t-2)}{20} = 1$$

$$\frac{4t + 3(t-2)}{60} = 1$$

$$7t - 6 = 60$$

$$7t = 66$$

$$t = \frac{66}{7} \text{ hod} \doteq \underline{\underline{9 \text{ hod } 26 \text{ min}}}$$

Př. 18. Řeš rovnici s absolutní hodnotou

$$|3x-6| = 9$$

⇒ určíme nulový bod N.B. 2

⇒ sestavíme tabulku nebo zakreslíme číselnou osu

⇒ odstraníme absol. hodnotu dle definice

$|A| = A$ pro $A > 0$

$|A| = -A$ pro $A < 0$

A … libovolný výraz

⇒ dosadíme lib. číslo z daného intervalu do výrazu s abs. h.

⇒ vyjde-li výsledek záporně, obrátíme v celém výrazu znaménka

⇒ kladně, opíšeme výraz jak je

⇒ zkontrolujeme, zda výsledky leží v intervalu, na kterém řešíme dílčí rovnici BEZ absol. h. Pokud NE ⇒ $\emptyset$

I. $(-\infty; 2)$	II. $\langle 2; +\infty)$
volíme např. 1	volíme např. 3.
$3\cdot 1-6=-3 \Rightarrow \ominus$	$3\cdot 3-6=3 \Rightarrow \oplus$
⇒ výraz $\lvert 3x-6\rvert$ nahradíme výrazem $-3x+6$ bez abs. h.	výraz $\lvert 3x-6\rvert$ nahradíme výrazem $3x-6$

I. $-3x+6=9$

$-3x=3$

$\underline{x=-1}$

-1 leží v $(-\infty; 2)$ je tedy řešením

II. $3x-6=9$

$3x=15$

$\underline{x=5}$

5 leží v $\langle 2; +\infty)$ je tedy řešením

konečné řešení: $K=\{-1; 5\}$

$\boxed{\text{Př. 19}}$ U dané kvadratické rovnice určete kořen x_2 a koeficient m, je-li $x_1 = 8$ 16)

$$x^2 + mx + 24 = 0$$

$\Rightarrow$ využijeme vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

I. $x_1 + x_2 = -p$

II. $x_1 \cdot x_2 = q$

pro NORMOVANÝ TVAR $x^2 + px + q = 0$ $(a = 1)$

je-li $a \neq 1$, vydělíme celou rovnici číslem $\underline{a}$

I. $8 + x_2 = -m$

II. $8 \cdot x_2 = 24 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 3}}$ dosadíme $\Rightarrow$ $8 + 3 = -m$

$\underline{\underline{m = -11}}$

Př. 20. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\dfrac{2x}{x-2} = 3$

$\Rightarrow$ můžeme použít 2 způsoby

1) převést vše na společného jmenovatele a řešit typ $\frac{A}{B} = 0$

2) za příslušné podmínky $(x \neq 2)$ vynásobit CELOU ROVNICI výrazem $x-2$

1. způsob: podm. $x \neq 2$

$$\frac{2x}{x-2} - 3 = 0$$

$$\frac{2x - 3(x-2)}{x-2} = 0$$

$$\frac{2x - 3x + 6}{x-2} = 0$$

$$\frac{-x+6}{x-2} = 0$$

zlomek $= 0 \Leftrightarrow$ čitatel $= 0$

$$-x + 6 = 0$$

$$-x = -6 \quad /\cdot(-1)$$

$$\underline{x = 6}$$

– vyhovuje podmínce $x \neq 2$

$$K = \{6\}$$

2. způsob:

$x \neq 2$

$$\frac{2x}{x-2} = 3 \quad /\cdot(x-2)$$

$$2x = 3(x-2)$$

$$2x = 3x - 6$$

$$\underline{6 = x}$$

$$K = \{6\}$$

Př. 21 Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\dfrac{2x}{x-2} \geqq 3$

⇒ v případě NEROVNICE V PODÍLOVÉM TVARU MUSÍME VŽDY použít metodu převodu na společ. jmenovatele

SPRÁVNĚ:

$x \neq 2$

$$\frac{2x}{x-2} - 3 \geq 0$$

$$\frac{2x-3(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{-x+6}{x-2} \geq 0$$

celý zlomek má být ≥ 0

⇒ vyhovuje pouze interval $(2;6\rangle$

⇒ u 2 kulatá $(x \neq 2)$

⇒ u 6 špičatá $(\geqq 0)$

$$x \in (2;6\rangle$$

ŠPATNĚ:

$$\frac{2x}{x-2} \geqq 3 \quad /\cdot(x-2)$$

$$2x \geq 3(x-2)$$

$$2x \geq 3x-6$$

$$6 \geq x$$

$$x \leq 6 \qquad x \in (-\infty;6\rangle$$

určíme nulové body: $2;6$

sestavíme tabulku a určíme $\pm$ výrazů na jednotlivých intervalech (dosaz. lib. čísla z daného intervalu)

volíme	1 $(-\infty;2)$	3 $(2;6)$	7 $\langle 6;+\infty)$
$-x+6$	+	+	−
$x-2$	−	+	+
	⊖	⊕	⊖

Př. 22. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici: $4^{x-1}+4^{x-2}+4^{x-3}=42$

⇒ číslo 42 není mocninou č. 4, takže v této chvíli nemůžeme obě strany rovnice převést na s

⇒ kdyby číslo 42 bylo mocninou č. 4 stejně by to nešlo, protože na levé straně rovnice je mezi výrazy + (nebo −)

⇒ rovnici upravíme a vytkneme před závorku 4^x

$$4^x\cdot 4^{-1}+4^x\cdot 4^{-2}+4^x\cdot 4^{-3}=42$$

$$4^{-1}=\frac{1}{4^1}=\frac{1}{4}$$

$$4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$$

$$4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

$$4^x\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)=42$$ zjednodušíme závorku

$$4^x\cdot\left(\frac{16+4+1}{64}\right)=42$$

$$4^x\cdot\frac{21}{64}=42$$ zkrátíme 21 celou rovnici

$$4^x\cdot\frac{1}{64}=2$$ vynásobíme 64 celou rovnici

$$4^x=128$$ 128 vyjádříme jako $4^?$ ⇒ nejde, ale jde jako 2^7

$$4^x=(2^2)^x=2^{2x}$$

$$2^{2x}=2^7$$

$$2x=7$$

$$\underline{\underline{x=\frac{7}{2}}}$$

Př. 23 Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici: $4^x + 2^{x+1} = 80$ 20)

$\Rightarrow$ číslo 4 se dá zapsat jako 2^2 $\Rightarrow$ signalizuje kvadratickou rovnici PO PŘÍSLUŠNÉ SUBSTITUCI

$\Rightarrow$ 4^x vyjádříme jako $(2^2)^x = (2^x)^2$

$(2^x)^2 + 2^x \cdot 2 = 80$ provedeme substituci

$y^2 + 2y - 80 = 0$ $y = 2^x$

18

$$y_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-80)}}{2} \begin{cases} 8 \\ -10 \end{cases}$$

dosadíme zpět do substituce!

$2^x = 8$ $2^x = -10$

$2^x = 2^3$ $\emptyset$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$\Rightarrow$ exp. fce 2^x nemůže nabývat záporných hodnot

Př. 24. Vypočtěte: $2\cdot\log_3\sqrt{27} - \log_3 1 + \log_3 \frac{1}{27} - \log_3 3$

⇒ první výraz upravíme podle 3. věty o logaritmech

$$\log x^n = n\cdot\log x \Rightarrow 2\cdot\log_3\sqrt{27} = \log_3(\sqrt{27})^2 = \log_3 27 = 3$$

⇒ ostatní logaritmy vypočítáme podle pravidla P_1:

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$$

$\log_3 1 = 0$, $\log_3 27^{-1} = \log_3 3^{-3} = -3$, $\log_3 3 = 1$ a dosadíme:

$$3 - 0 + (-3) - 1 = \underline{\underline{-1}}$$

Př. 25. Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $\log(x+3) + \log(x-3) = 2\log(x+1)$

V1: $\log[(x+3)(x-3)] \overset{V3:}{=} \log(x+1)^2$

odlogaritmujeme

$$(x+3)(x-3) = (x+1)^2$$
$$x^2 - 9 = x^2 + 2x + 1$$
$$-10 = 2x$$
$$x = -5 \Rightarrow \text{nevyhovuje}$$
$$K = \emptyset$$

! PODMÍNKY

$$\underbrace{\begin{array}{ll} x+3>0 & x>-3 \\ x-3>0 & x>3 \\ x+1>0 & x>-1 \end{array}}_{}$$

$x \in (3;+\infty)$

b) $\log_2(4x-4) - \log_2(3-x) = 2$

V2: $\log_2 \frac{4x-4}{3-x} = 2$

P1: $\frac{4x-4}{3-x} = 2^2 \Rightarrow \frac{4x-4}{3-x} = 4$

$$4(x-1) = 4(3-x)$$
$$x - 1 = 3 - x$$
$$2x = 4 \qquad \underline{\underline{x = 2}} \text{ – vyhovuje}$$

! PODMÍNKY

$4x-4>0 \quad x>1$

$3-x>0 \quad x<3$

$x \in (1;3)$ podmínka

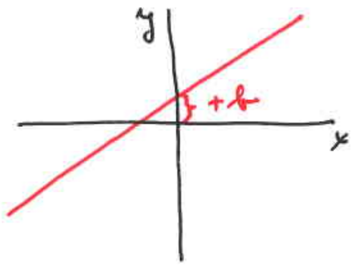
4. FUNKCE

PŘEHLED FUNKCÍ:

1) LINEÁRNÍ $y = ax + b$

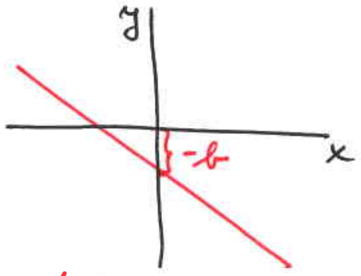
grafem je PŘÍMKA

$a > 0$



rostoucí

$a < 0$



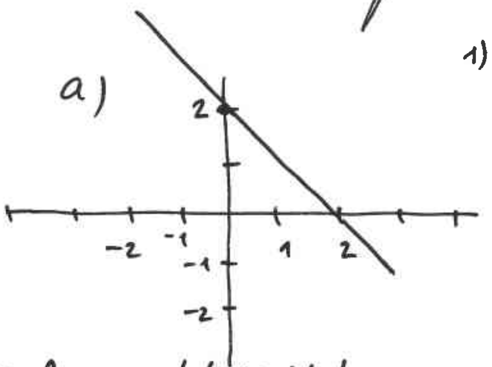
klesající

- parametr b určuje posun funkce po ose y

Př. 26 K daným grafům přiřaď funkce

1) $y = x - 2$, 2) $y = -x + 2$, 3) $y = 2x + 1$, 4) $y = -2x - 2$

a)



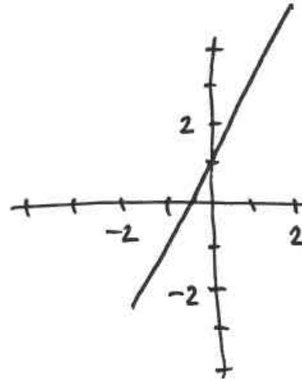
⇒ fce je klesající

⇒ vylučujeme 1) a 3)

⇒ dosadíme $x = 0$ do 2) a 4) ⇒ $y = 2$ ✓ ⇒ $y = -2$ ∅

$y = -x + 2$

b)



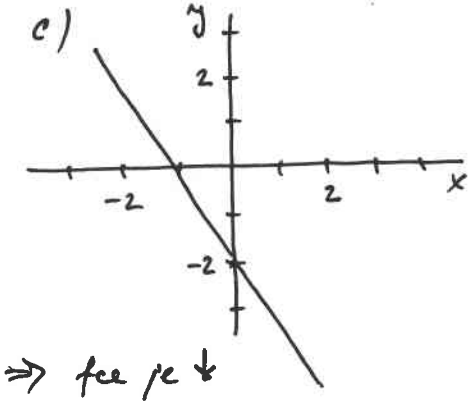
⇒ fce je ↑

⇒ vyloučíme 2) 4)

⇒ pro $x = 0$ je u 1) $y = -2$ ∅, 3) $y = 1$ ✓

$y = 2x + 1$

c)



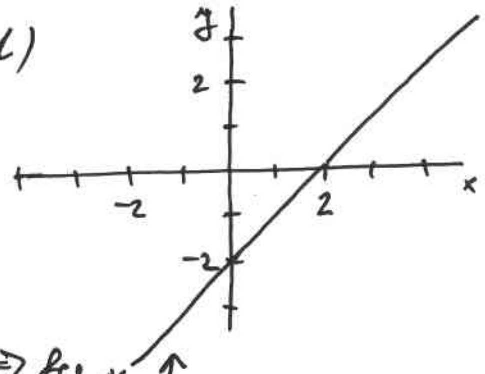
⇒ fce je ↓

⇒ vylouč. 1) 3)

⇒ pro $x = 0$ je $y = 2$ ∅, $y = -2$ ✓

$y = -2x - 2$

d)



⇒ fce je ↑

⇒ vylouč. 2) 4)

⇒ $x = 0$ $y = -2$ ✓, $y = 1$ ∅

$y = x - 2$

Př. 27

Určete lineární funkci, jejíž graf prochází body $[1;-1]$ a $[-2;5]$

⇒ zapíšeme obecný předpis pro lineární fci $y=ax+b$

⇒ za x a y dosadíme nejprve 1. a pak 2. bod

⇒ řešíme soustavu 2 rovnic s neznámými a a b

⇒ zapíšeme výslednou lineární fci

$$y = ax+b$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & -1 = a\cdot 1+b \\ \text{II.} & 5 = a(-2)+b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a+b=-1 \quad /\cdot 2 \\ -2a+b=5 \quad \oplus \end{array}$$

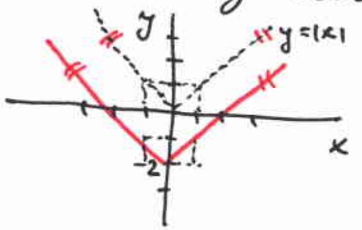
$$\left.\begin{array}{ll} 3b=3 & a+1=-1 \\ \underline{b=1} & \underline{a=-2} \end{array}\right\} \underline{\underline{y=-2x+1}}$$

Př. 28

Sestrojte graf funkce

a) $y=|x|-2$ posun vůči ose y

⇒ sestrojíme $y=|x|$ a až graf posuneme o 2 dílky dolů na ose y



$y=|x|$ prochází $[1;1]$, $[-1;1]$, $[0;0]$

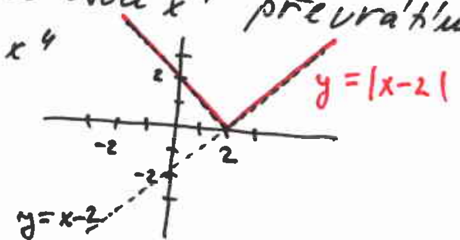
⇒ přímka

b) $y=|x-2|$

⇒ posun vůči ose $y=0$ ⇒ hrot leží na ose x!

⇒ sestrojíme $y=x-2$ (pomocný graf)

⇒ co je „pod osou x" převrátíme symetricky „nad osu x"



$y=x-2$

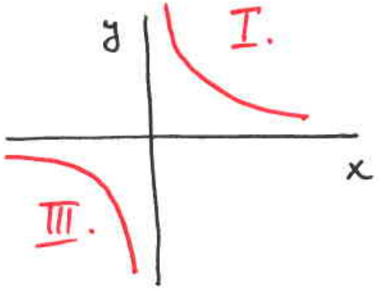
$x=0 \quad y=-2$

$y=0 \quad x=2$

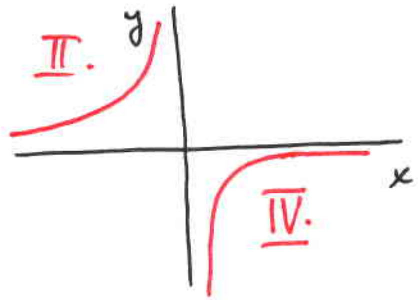
2) NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST $y = \frac{k}{x}$

grafem je HYPERBOLA

$k > 0$



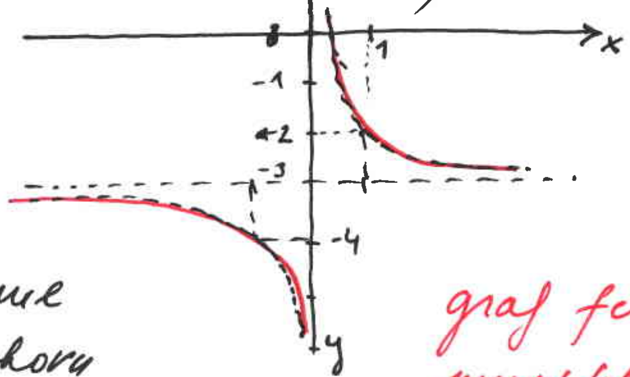
$k < 0$



$\boxed{\text{Př. 29.}}$ Načrtněte graf funkce

a) $y = \frac{1}{x} - 3$

⇒ črtneme $y = \frac{1}{x}$ a celou funkci posuneme o 3 dílky dolů na ose y (nebo osu ~~y~~ x o 3 nahoru)



$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 3 = 0$

$\frac{1}{x} = 3$

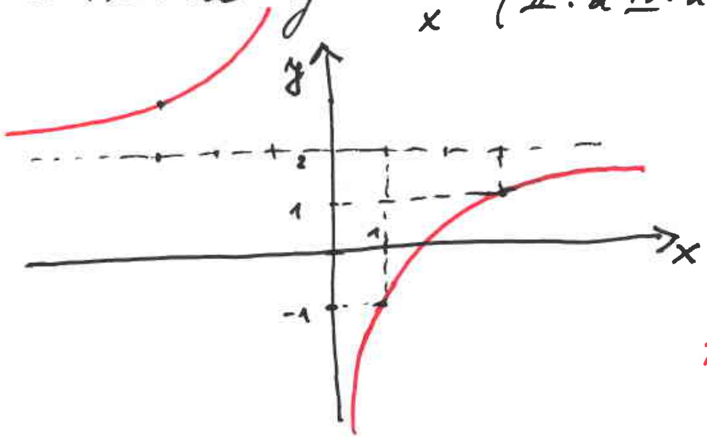
$x = \frac{1}{3}$

graf fce se musí blížit přímce $y = -3$

b) $y = 2 - \frac{3}{x}$

⇒ přepíšeme na tvar $y = -\frac{3}{x} + 2$

⇒ črtneme $y = -\frac{3}{x}$ (II. a IV. kv.) a posuneme o 2 nahoru (osa x o 2 dolů)



graf fce se musí blížit přímce $y = 2$

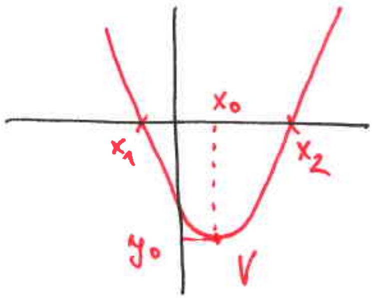
3) KVADRATICKÁ $y = ax^2 + bx + c$

grafem je PARABOLA s vrcholem $V[x_0, y_0]$ který určíme rychle

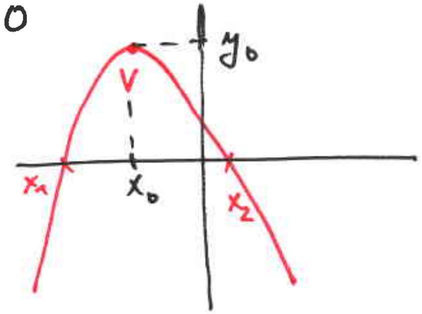
jako: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad y_0 = a x_0^2 + b x_0 + c$

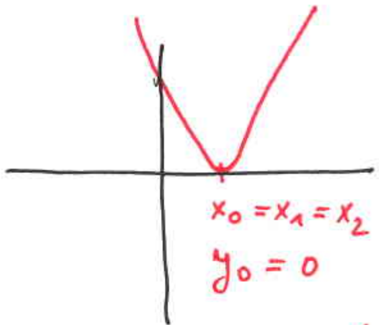
nebo pomocí 1. derivace $y' = 2ax_0 + b = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$a > 0$ $\qquad\qquad a < 0$

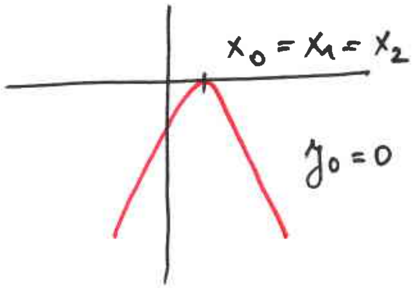


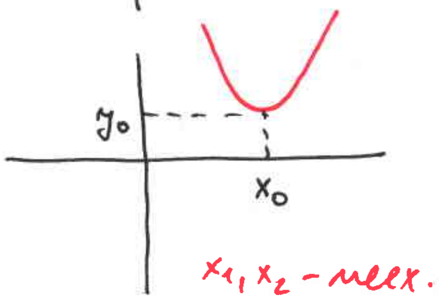
2 průsečíky s osou x



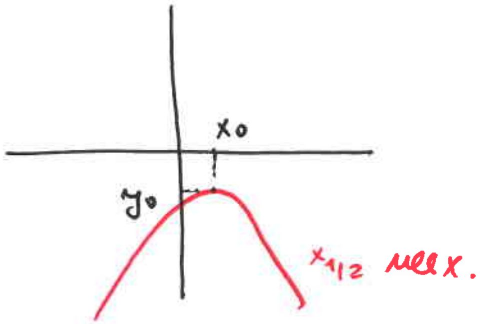


1 průsečík s osou x





žádný průsečík s osou x

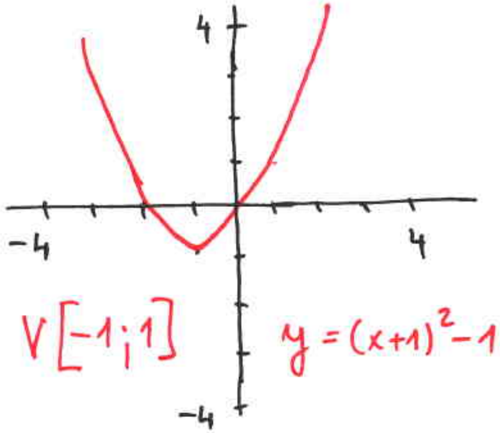


Př. 30. K daným grafům přiřaďte správné funkce

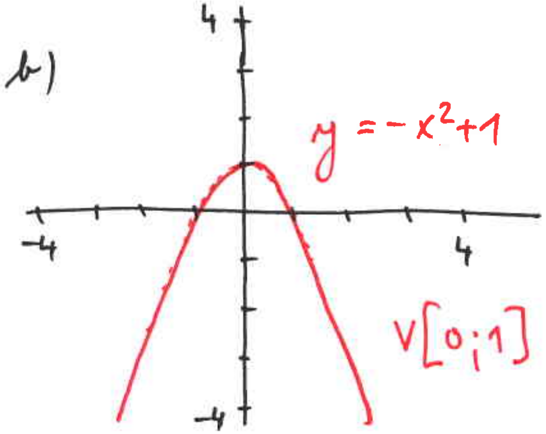
1) $y=(x-1)^2$ 2) $y=x^2-1$

3) $y=-x^2+1$ 4) $y=(x+1)^2-1$

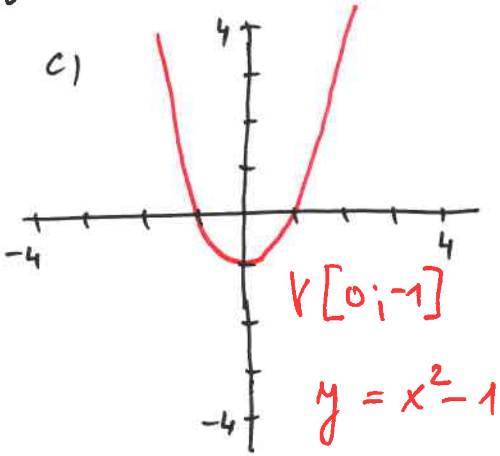
a)



b)

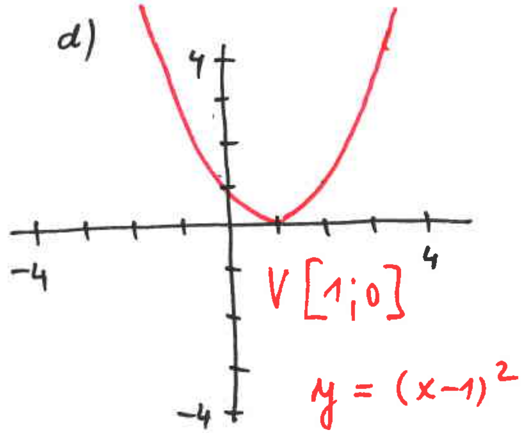


c)



⇒ určíme souřadnice vrcholu každé fce a podle koeficientu u x^2 jde-li o typ $\cup$ nebo $\cap$

d)



1) $V[1;0]$ typ $\cup$ ⇒ odpověď d)

2) $V[0;-1]$ typ $\cup$ ⇒ odp. c)

3) $V[0;1]$ typ $\cap$ ⇒ odp. b)

4) $V[-1;-1]$ typ $\cup$ ⇒ odp. a)

Př. 31 Jaké minimální hodnoty nabývá funkce

$y = x^2 - 6x + 10$ 27)

⇒ jedná se o kvadratickou fci, otevřenou nahoru $\vee$

⇒ své nejmenší hodnoty nabývá ve svém vrcholu

⇒ cílem je zjistit y_0

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2} = 3$ $y_0 = 3^2 - 6.3 + 10 = 9 - 18 + 10 = \underline{\underline{1}}$

Př. 32. Při svislém vrhu se výška s (v metrech) měnila podle vztahu $s = 20 + 40t - 5t^2$, kde t je čas v sekundách. Do jaké maximální výšky těleso vystoupilo a za jakou dobu?

⇒ jedná se o aplikaci KVADRATICKÉ FUNKCE

⇒ koef. u t^2 je -5 ⇒ typ $\cap$ ⇒ fce má tedy ve svém vrcholu $V[x_0; y_0]$

MAXIMUM

y_0 -- odpovídá max. výšce

x_0 --- odpovídá času

$y = -5x^2 + 40x + 20$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2.(-5)} = \underline{\underline{4\,s}}$

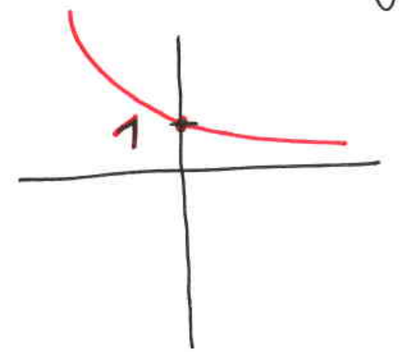
$y_0 = -5.(4^2) + 40.4 + 20 = -80 + 160 + 20 = \underline{\underline{100\,m}}$

4) EXPONENCIÁLNÍ $y = a^x$ $a \neq 1$ $a > 0$

$\Rightarrow$ grafem je EXPONENCIÁLA

$\Rightarrow$ jde o inverzní fci k fci logaritmické

$a < 1$ Př. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

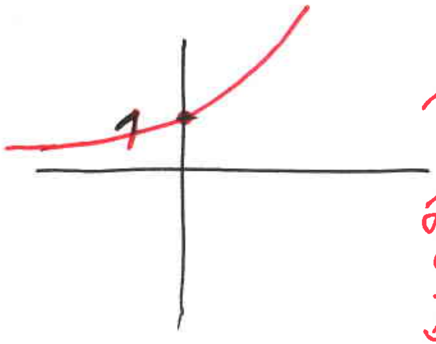


klesající

$H_f = (0; +\infty)$

$D_f = \mathbb{R}$

$a > 1$ Př. $y = 2^x$



rostoucí

$H_f = (0; +\infty)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Př. 33.}}$ Určete obor hodnot funkce $y = 3^x - 4$

$\Rightarrow$ grafem je rostoucí exponenciála

$\Rightarrow$ graf fce $y = 3^x$ se blíží 0

$\Rightarrow$ graf fce $y = 3^x - 4$ se posune o 4 dolů

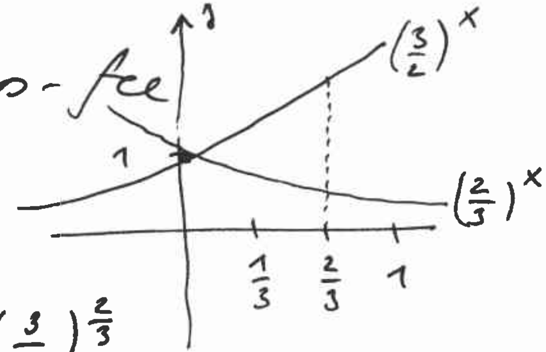
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{H_f = (-4; +\infty)}}$

$\boxed{\text{Př. 34.}}$ Srovnejte podle velikosti od nejmenšího po největší čísla $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, (1,5)^{0}$

⇒ čísla rozdělíme nejprve podle základů na <1 a >1

<1 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ⇒ klesající fce

>1 : $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, (1,5)^{0}$ ⇒ rostoucí fce



⇒ k řešení využijeme poznatky o grafu exp-fce

⇒ nejprve porovnáme $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ a $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

⇒ z grafů obou fcí plyne že $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

⇒ dále porovnáme stejné základy o různých exponentech

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ základ je <1, vyšší exponent tedy znamená MENŠÍ ČÍSLO

číslo $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ je tedy NEJMENŠÍ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < (1,5)^{0} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

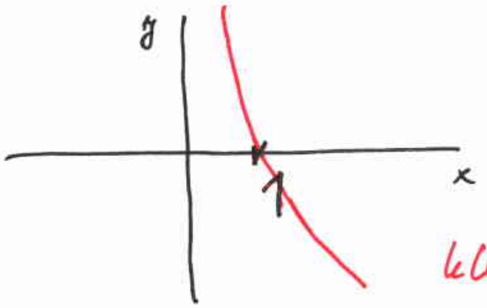
$(1,5)^{0} = 1$ $1,5 = \frac{3}{2}$

5) LOGARITMICKÁ $y = \log_a x$ $a \neq 1$ $a > 0$

⇒ grafem je LOGARITMICKÁ KŘIVKA

⇒ jde o inverzní fci k fci exponenciální

$a < 1$ Př. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



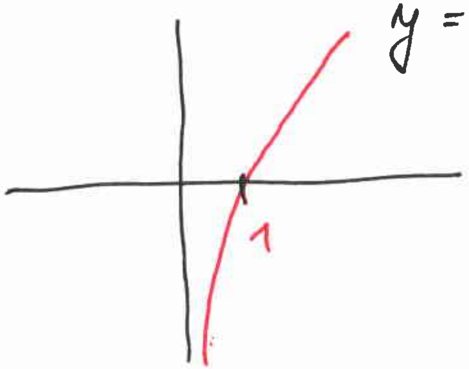
klesající

$D_f = (0; +\infty)$

$H_f = \mathbb{R}$

$a > 1$ Př. $y = \log_2 x$

$y = \ln x = \log_e x$, $e = 2{,}71\ldots$



$\boxed{\text{Př. 35}}$ Určete definiční obor funkce $y = \log\left(\frac{-3}{x+1}\right)$

⇒ výraz za logaritmem musí být > 0

$$\frac{-3}{x+1} > 0$$

⇒ -3 je záporné, aby byl celý zlomek kladný, musí být výraz $x+1$ také záporný:

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

D_f: $\underline{x \in (-\infty; -1)}$

$\boxed{\text{Př. 36}}$ Seřaďte podle velikosti čísla od největšího po nejmenší: 31)

$\log_{\frac{1}{2}} 2,\ \log_2 2^{-1},\ \log_2 1,\ \log_{\frac{1}{2}} 2^{-1},\ \log_2 2$

⇒ v tomto případě většinou nelze použít kalkulačku, protože ta pracuje pouze s dekadickým ($\log_{10} x = \log x$) a přirozeným ($\ln x$) logaritmem

⇒ hodnoty logaritmů vypočítáme podle pravidla P1

$\log_{\frac{1}{2}} 2 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2 \Rightarrow (2^{-1})^y = 2^1$ ⇒ převedeme na exponenciální tvar

$y = -1$

$\underline{\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1}$

$\log_2 2^{-1} = y \Rightarrow 2^y = 2^{-1} \quad y = -1 \quad \underline{\log_2 2^{-1} = -1}$

$\log_2 1 = y \Rightarrow 2^y = 1 = 2^0 \quad y = 0 \quad \underline{\log_2 1 = 0}$

$\log_{\frac{1}{2}} 2^{-1} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^{-1} \Rightarrow 2^{-y} = 2^{-1} \quad y = 1 \quad \underline{\log_{\frac{1}{2}} 2^{-1} = 1}$

$\log_2 2 = y \Rightarrow 2^y = 2^1 \Rightarrow y = 1 \quad \underline{\log_2 2 = 1}$

Výsledné řešení:

$$\underline{\underline{\log_2 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-1} > \log_2 1 > \log_2 2^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} 2}}$$

Př. 37 Řeš nerovnice v $\mathbb{R}$:

a) $2^x > 8$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 3$ c) $2^x \leq 8$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$

⇒ u exp. i log. nerovnic si zapamatujeme, že pro
základ > 1 znaménko nerovnosti zůstává
základ < 1 —//— se mění na opačné
} plyne z grafů fcí

a) $2^x > 2^3 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \underline{\underline{x \in (3; +\infty)}}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty; -1)}}$ nebo $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(3^{-1}\right)^x = 3^{-x} \Rightarrow 3^{-x} > 3^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x > 1 \Rightarrow x < -1$

c) $2^x \leq 8 \Rightarrow 2^x \leq 2^3 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty; 3\rangle}}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow \underline{\underline{x \in \langle -2; +\infty)}}$

Př. 38. Řeš nerovnice v $\mathbb{R}$:

a) $\log_2 x > 3$ | b) $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ | c) $\log_3 x \leq 2$ | d) $\log_{\frac{1}{2}} x < 3$

⇒ u všech nerovnic musíme mít na paměti že platí podmínka $x > 0$!

⇒ převedeme na exp. tvar, pro základ < 1 obracíme znaménko nerovnosti!

a)

$x > 2^3$

$x > 8$

$\underline{\underline{x \in (8; +\infty)}}$

b)

$x < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x < \frac{1}{4}$

a současně $x > 0$

⇓

$\underline{\underline{x \in \left(0; \frac{1}{4}\right)}}$

c)

$x \leq 3^2$

$x \leq 9$

a současně $x > 0$

⇓

$\underline{\underline{x \in (0; 9\rangle}}$

d)

$x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$x > \frac{1}{8}$

$\underline{\underline{x \in \left(\frac{1}{8}; +\infty\right)}}$

6) GONIOMETRICKÉ

⇒ všechny jsou periodické

$\sin x, \cos x \Rightarrow$ perioda $2k\pi$

$\mathrm{tg}\, x, \mathrm{cotg}\, x \Rightarrow$ perioda $k\pi$

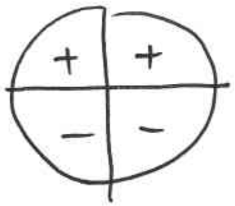
$y = \sin x \Rightarrow$ lichá fce

$y = \cos x \Rightarrow$ sudá fce

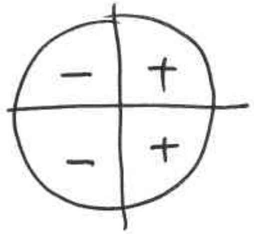
$y = \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$ lichá fce; $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$y = \mathrm{cotg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x} \Rightarrow$ lichá fce $x \neq k\pi$

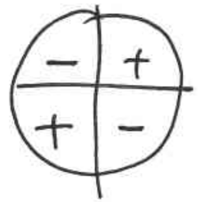
$\sin x$



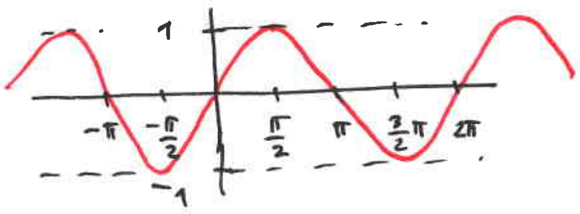
$\cos x$



$\mathrm{tg}\, x, \mathrm{cotg}\, x$



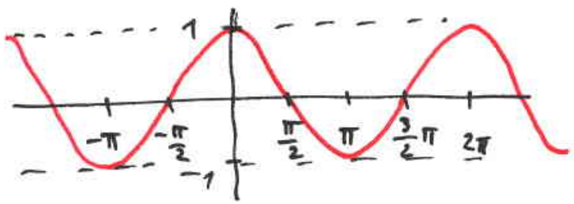
$\sin(-x) = -\sin x$



$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -1; 1 \rangle$

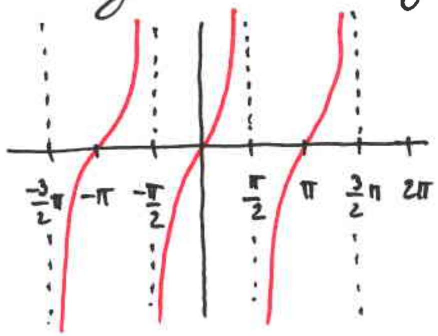
$\cos(-x) = \cos x$



$D_f = \mathbb{R}$

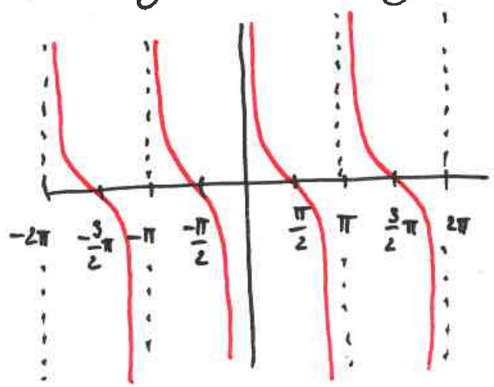
$H_f = \langle -1; 1 \rangle$

$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}\, x$



$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{k\pi}{2} \right\}$

$H_f = \mathbb{R}$

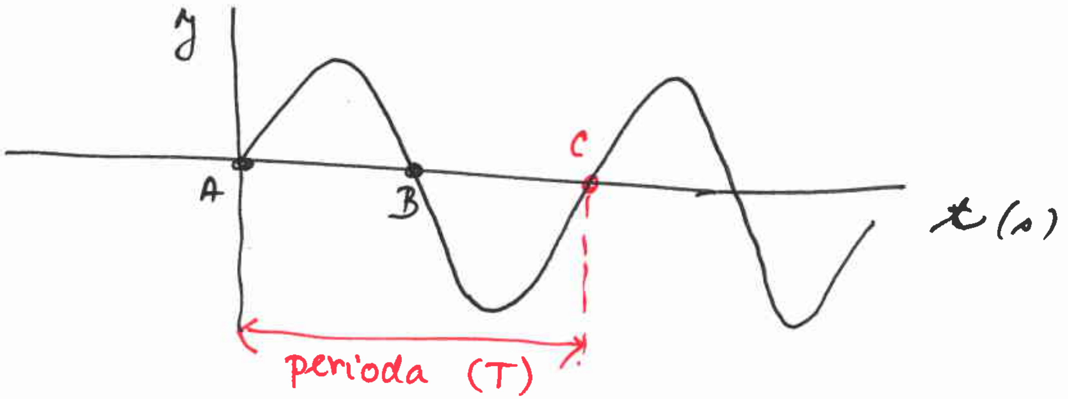


$D_f = \mathbb{R} - \{ k\pi \}$

$H_f = \mathbb{R}$

Př. 39. Mechanický oscilátor kmitá podle předpisu $y = y_m \cdot \sin(\omega t)$. Při měření bylo zjištěno, že doba mezi dvěma po sobě jdoucími průchody oscilátoru rovnovážnou polohou je 1,5 s. Jaká je perioda kmitů?

⇒ k řešení využijeme graf funkce sinx



rovnovážná poloha
⇒ $y = 0$
⇒ označíme ty body v grafu jako A, B

⇒ je-li časová délka úseku AB $t = 1{,}5\ s$
z grafu plyne, že se jedná o polovinu periody

$$\frac{T}{2} = 1{,}5\ s \qquad \underline{\underline{T = 3\ s}}$$

5. POSLOUPNOSTI, FINANČNÍ MATEMATIKA

AP:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_r = a_s + (r-s)d$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

GP:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

⇒ konverguje pro $|q| < 1$

FM:

1) $$K_n = K_0 \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$$

– rovnoměrný růst (+) nebo pokles (−) veličiny o p % za n daných období (rok, měsíc, ...)

2) $$K_n = K_0 \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{p}{100}\right)^n$$

⇒ 15% daň

⇒ p ... ~~po~~ úrok v % většinou p.a. (per annum) ⇒ za rok

3) $$K_m = K_0 \left(1 + \frac{1}{k}\, 0{,}85 \cdot \frac{p}{100}\right)^m$$

k ... počet úrok. období za 1 rok

n ... počet roků $\quad m = k \cdot n$

Př. 40. Určete součin druhého a pátého členu AP ve které je dáno: $a_3 = 2$, $a_6 = -4$.

⇒ určíme nejprve diferenci d ze vztahu $a_r = a_s + (r-s)d$

⇒ víme, že každý následující člen AP vznikne přičtením diference k předchozímu, tj: $a_3 = a_2 + d$, $a_6 = a_5 + d$

⇒ vypočítáme a_2, a_5 a vynásobíme

$$a_6 = a_3 + (6-3)\cdot d$$
$$-4 = 2 + (3d)$$
$$-6 = 3d$$
$$\underline{d = -2}$$

$$a_2 = a_3 - d$$
$$\underline{a_2 = 2-(-2) = 4}$$

$$a_5 = a_6 - d$$
$$\underline{a_5 = -4-(-2) = -2}$$

$$a_2 \cdot a_5 = 4 \cdot (-2) = \underline{\underline{-8}}$$

Př. 41 Číslo 55 rozložte na součet několika čísel tak, aby každé následující bylo o 4 vyšší než předcházející a poslední bylo 19.

⇒ víme, že poslední je 19, ale nevíme, jestli je to 3., 4., nebo jaké; víme, že diference $d = 4$

⇒ sčítáme tedy obecně $\underline{n}$ členů ⇒ $a_n = 19$

⇒ využijeme vztahy pro AP a dosadíme za vše, co známe

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{a} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\underbrace{\text{I. } 55 = \frac{n}{2}(a_1 + 19) \quad \wedge \quad \text{II. } 19 = a_1 + (n-1)\cdot 4}_{\text{soustava 2 rovnic s neznámými } n \text{ a } a_1}$$

⇒ z II. vyjádříme a_1 a dosadíme do I.

$19 = a_1 + 4n - 4$

$23 = a_1 + 4n$

$a_1 = 23 - 4n$

$110 = n(23 - 4n + 19)$

$110 = n(42 - 4n)$

$110 = 42n - 4n^2$

$4n^2 - 42n + 110 = 0$

$2n^2 - 21n + 55 = 0$

$$n_{1/2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 4.2.55}}{4} \quad \begin{cases} \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \; \emptyset \\ \frac{20}{4} = \underline{\underline{5}} \end{cases}$$

$n \in N$ ($\frac{11}{2} \notin N$)

$\underline{\underline{a_5 = 19}}$

$\underline{\underline{a_4 = 19 - 4 = 15}}$

$\underline{\underline{a_3 = a_4 - 4 = 15 - 4 = 11}}$

$\underline{\underline{a_2 = 7}}$ $\underline{\underline{a_1 = 3}}$

Př. 42. Určete takovou AP, ve které platí:

$$a_2 - 2a_3 = -9, \quad 2a_4 + a_6 = 31$$

⇒ všechny členy vyjádříme pomocí a_1 a d ⇒ dále řešíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých (a_1, d)

$a_2 = a_1 + d \qquad a_4 = a_1 + 3d \qquad$ I. $a_1 + d - 2(a_1 + 2d) = -9 \Rightarrow -a_1 - 3d = -9 \quad /\cdot 3$

$a_3 = a_1 + 2d \qquad a_6 = a_1 + 5d \qquad$ II. $2(a_1 + 3d) + a_1 + 5d = 31 \Rightarrow 3a_1 + 11d = 31 \quad (+)$

$2d = 4 \Rightarrow \underline{\underline{d = 2}}$

$-a_1 = 3d - 9 = 6 - 9 = -3$

$\underline{\underline{a_1 = 3}}$

Př. 43. Teplota Země přibývá do jejího středu o 1°C na 33 m. Jaká je teplota v hloubce 1015 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C.

⇒ určíme teplotu ve dvou různých hloubkách a z těchto hodnot vypočítáme diferenci, pak lib. člen dle $a_n = a_1 + (n-1)d$ nebo $a_r = a_s + (r-s)d$

v 25 m .... $a_{25} = 9$

v 58 m (25+33) $a_{58} = 10$

$a_r = a_s + (r-s)d$

$a_{58} = a_{25} + (58-25)\cdot d$

$10 = 9 + 33d$

$1 = 33d$

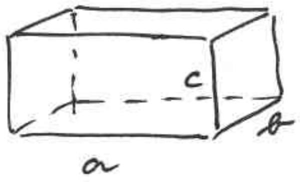
$d = \frac{1}{33}$

$a_{1015} = a_{25} + (1015-25)\cdot\frac{1}{33}$

$a_{1015} = 9 + \frac{990}{33} = \underline{\underline{39°}}$

Př. 44. Délky hran kvádru v cm tvoří 3 po sobě jdoucí členy GP. Kvádr má objem $V = 216\ cm^3$. Součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu je 21 cm. Urči rozměry kvádru.

⇒ zakreslíme kvádr a označíme jednotlivé strany pomocí členů GP



$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 \\ b &= a_2 = a_1 \cdot q \\ c &= a_3 = a_1 q^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} V &= abc \\ 216 &= a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_1^3 \cdot q^3 &= 216 \\ (a_1 q)^3 &= 216 \\ a_1 q &= 6 \end{aligned}$$

⇒ I.

⇒ dále určíme, že součet hran je 21

$$a + b + c = 21$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 21 \Rightarrow a_1 + \overset{6}{\widetilde{a_1 q}} + \overset{6}{\widetilde{a_1 q}} \cdot q = 21$$

⇒ dosadíme za $a_1 q$ číslo 6 ⇒ $a_1 + 6 + 6q = 21$

$$a_1 + 6q = 15 \Rightarrow \text{II.}$$

⇒ řešíme soustavu

$$a_1 q = 6$$
$$\underline{a_1 + 6q = 15} \Rightarrow a_1 = 15 - 6q$$

dosadíme

$$(15 - 6q)q = 6$$

$$15q - 6q^2 = 6$$
$$6q^2 - 15q + 6 = 0$$

$$q_{1|2} = \frac{15 \pm \overset{9}{\sqrt{225-144}}}{12}$$

$$q_{1|2} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

pro $q = 2$: $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12$

pro $q = \frac{1}{2}$: $a_1 = 12, a_2 = 6, a_3 = 3$

Kvádr má rozměry $3 \times 6 \times 12$ cm.

Př. 45. Stroj ztrácí každý rok 10 % své hodnoty. Jaká byla jeho nákupní hodnota, jestliže po 13 letech měl hodnotu 10 168 Kč?

⇒ Využijeme vztah pro rovnoměrný pokles

$$K_n = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

$p = 10\,\%$ $\quad n = 13$ let $\quad K_n = 10\,168$

$$10\,168 = K_0 \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{13}$$

$$10\,168 = K_0 \,(0{,}9)^{13}$$

$$K_0 = \frac{10\,168}{(0{,}9)^{13}} = \underline{\underline{40\,002 \text{ Kč}}}$$

Př. 46 Truhlář nakoupil na úvěr s úrokovou mírou 10 % p.a. materiál v ceně 800 000 Kč, úroky se připisují koncem každého roku. Kapitál splatí celou částku jednorázově po 5 letech. O kolik % splátka převýší úvěr?

⇒ Výši částky (bez daní) vypočítáme podle $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

$$K_5 = 800\,000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 800\,000 \cdot (1{,}1)^5 = 1\,288\,408 \text{ Kč}$$

⇒ úrok je $1\,288\,408 - 800\,000 = 488\,408$ Kč

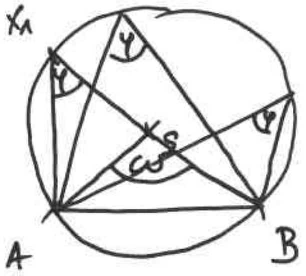
100 % ... 800 000 Kč
x % ... 488 408 Kč

$x = 0{,}61051 \cdot 100 \doteq \underline{61\,\%}$

Splátka převýší úvěr o 61 %.

6. PLANIMETRIE

1) STŘEDOVÝ A OBVODOVÝ ÚHEL

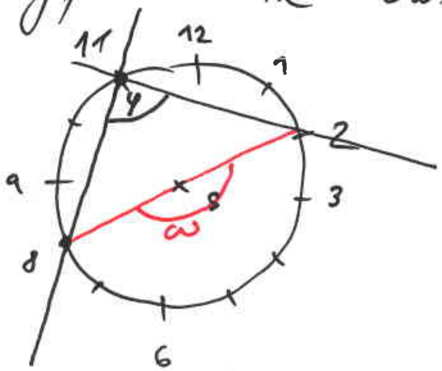


φ ... obvodový úhel
ω ... středový úhel
příslušný k téže tětivě

$\omega = 2\varphi \qquad \varphi = \frac{\omega}{2}$

Př. 47. Určete velikost úhlu, který na ciferníku hodin svírají spojnice čísel 8,11 a 11,2

⇒ nejprve z obrázku určíme středový úhel a jeho velikost



⇒ mezi jednotlivými čísly je 30°

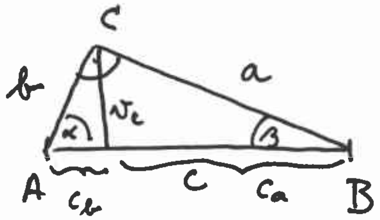
⇒ od 2 do 8 je to $6 \cdot 30 = 180° \Rightarrow \omega$

$$\varphi = \frac{\omega}{2} = \frac{180}{2} = \underline{\underline{90°}}$$

Spojnice čísel 8,11 a 11,2 svírají úhel 90°.

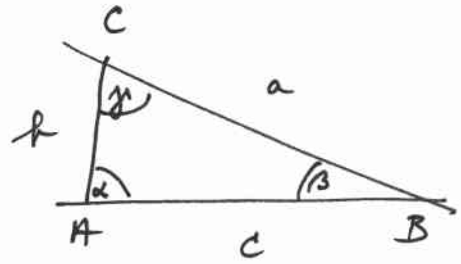
2) PRAVOÚHLÝ A OBECNÝ Δ

a) pravoúhlý



ANALOGIE

b) obecný



Pythagorova věta

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$ obsah Δ

Euklidovy věty:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \qquad a^2 = c \cdot c_a \qquad b^2 = c \cdot c_b$$

Trigonometrické fce:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$ nebo $$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S = \frac{b \cdot v_b}{2} \qquad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} \qquad S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Sinová věta

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Př. 48. Vypočítejte obsah $\triangle ABC$, ve kterém je dáno:

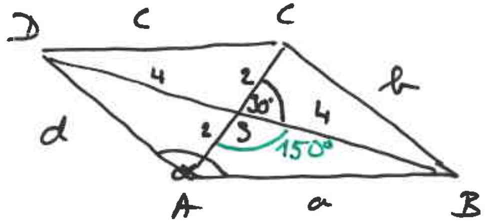
$a = 4\,cm,\ b = 5\,cm,\ \gamma = 30°$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = \underline{5\,cm^2}$$

Př. 49. Vypočítejte obsah rovnoběžníku ABCD, je-li $|AC| = 4\,cm$, $|BD| = 8\,cm$, $|\angle BSC| = 30°$. S je střed rovnoběžníku.

⇒ v rovnoběžníku platí jen to, že úhlopříčky se půlí (nejsou $\perp$)

$$S = a \cdot v_a \quad \text{nebo} \quad S = a \cdot b \sin\alpha$$



⇒ ze zadání plyne určit rovnoběžník:

z $\triangle BSC$ vypočítáme pomocí kosin. věty stranu b
z $\triangle ASB$ —||— stranu a
z $\triangle ABD$ —||— úhel α
} vypočítáme $S_{▱}$

$b^2 = SC^2 + SB^2 - 2 \cdot SC \cdot SB \cdot \cos 30°$

$b^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b^2 = 20 - 8\sqrt{3}$

$\underline{b \doteq 2{,}5\,cm}$

$a^2 = AS^2 + BS^2 - 2 \cdot AS \cdot BS \cdot \cos 150°$

$a^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$a^2 = 20 + 8\sqrt{3}$

$\underline{a \doteq 5{,}8\,cm}$

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos\alpha$

$64 = 20 + \cancel{8\sqrt{3}} + 20 - \cancel{8\sqrt{3}} - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}8 \cdot \cos\alpha$

$64 = 40 - 29 \cdot \cos\alpha$

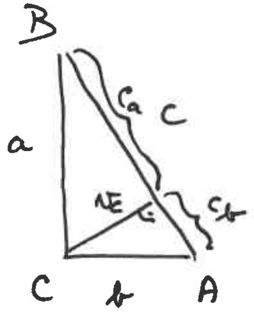
$24 = -29 \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{24}{29}$

$\underline{\alpha \doteq 146°}$

$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 5{,}8 \cdot 2{,}5 \cdot \sin 146°\ cm^2$

$\underline{S \doteq 8{,}1\,cm^2}$

Př. 50. V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $a = 3\,cm$ a $b = 4\,cm$ vypočítejte výšku v_c.



⇒ k výpočtu lze použít různé metody

⇒ nejrychlejší je použít Euklidovy věty

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \qquad a^2 = c \cdot c_a \qquad b^2 = c \cdot c_b$$

⇒ velikost strany c určíme rychle Pythagorovou větou $c = \sqrt{3^2+4^2} = 5\,cm$

$$a^2 = c \cdot c_a \Rightarrow 9 = 5 \cdot c_a \Rightarrow c_a = \frac{9}{5}$$

$$b^2 = c \cdot c_b \Rightarrow 16 = 5 \cdot c_b \Rightarrow c_b = \frac{16}{5}$$

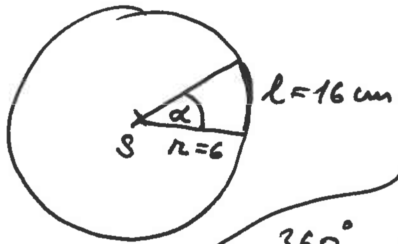
$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$

$$v_c^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}$$

$$v_c = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt{25}}$$

$$v_c = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4\,cm$$

Př. 51. Obvod kruhové výseče, která je částí kruhu s poloměrem $r = 6\,cm$, je $16\,cm$. Vypočítejte její obsah.



$$S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

kde α je úhel výseče.

Ten vypočítáme z délky oblouku

platí-li že $o = 2\pi \cdot r$

pak pro část $l = \alpha \cdot r$

kde α je v rad $\quad \alpha = \frac{16}{6} = 2{,}\bar{6}\,rad$

$\doteq 153°$

$360° \;\text{---}\; 2\pi\,rad$

$x \;\text{---}\; 2{,}6\,rad$

$$S = \frac{153}{360} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \doteq 48\,cm^2$$

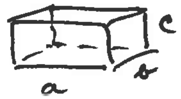
7. STEREOMETRIE

- krychle : $S = 6a^2$, $V = a^3$

stěnová úhlopříčka : $a\sqrt{2}$

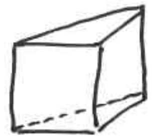
tělesová —"— : $a\sqrt{3}$

- kvádr : $S = 2(ab + ac + bc)$, $V = abc$

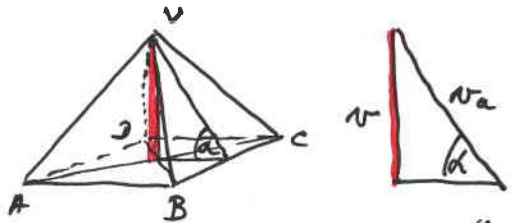


- hranol : $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, $V = S_p \cdot v$

Př. trojboký hranol



- jehlan : $S = S_p + S_{pl}$, $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

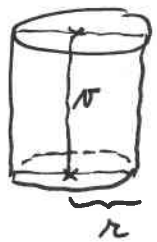


v_a --- stěnová výška

v --- tělesová výška

α --- odchylka boční stěny od roviny podstavy

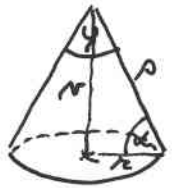
- válec : $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$, $V = \pi r^2 \cdot v$



r --- poloměr kruhové podstavy

v --- výška válce

- kužel : $S = S_p + S_{pl} = \pi r^2 + \pi r s$, $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$

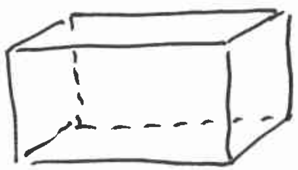


φ --- úhel u hlavního vrcholu

α --- odchylka stěny kužele od roviny podstavy

- koule : $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Př. 52 Délky hran kvádru jsou v poměru $2:4:6$ a jeho povrch je $5632\ m^2$. Určete jeho objem.



strany kvádru označíme pomocí výrazů

$2x,\ 4x,\ 6x$

$S = 2(ab + ac + bc)$

$5632 = 2(2x \cdot 4x + 2x \cdot 6x + 4x \cdot 6x)$

$2816 = 8x^2 + 12x^2 + 24x^2$

$44x^2 = 2816$

$x^2 = 64$

$\underline{x = 8}$

dosadíme zpět do a, b, c

$a = 2x = 2 \cdot 8 = 16\ m$

$b = 4x = 4 \cdot 8 = 32\ m$

$c = 6x = 6 \cdot 8 = 48\ m$

$V = abc$

$V = 16 \cdot 32 \cdot 48\ m^3$

$\underline{\underline{V = 24576\ m^3}}$

Př. 53. Pravoúhlý Δ s přeponou délky $5\ cm$ a obsahem $S = 6\ cm^2$ se otáčí kolem přepony. Urči objem a povrch vzniklého rotačního tělesa

$\Rightarrow$ nejprve určíme délky odvěsen

$\Rightarrow$ nejrychlejší zp. je Pythagorejský Δ

$3, 4, 5 \quad a = 3$

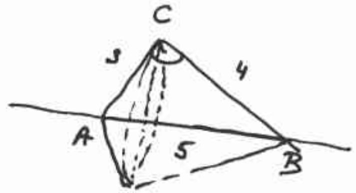
$b = 4$

$\Rightarrow$ jinak řešíme 2 rovnice

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$

$S = \frac{ab}{2} \Rightarrow ab = 12$

$\left.\begin{matrix} a^2+b^2=25 \\ ab=12 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a = 3 \\ b = 4 \end{matrix}$ nebo naopak



rotací Δ kolem přepony vznikne těleso složené ze 2 kuželů

1. kužel i 2. kužel mají poloměr podstavy $= v_c$

výška 1. kužele $v_1 = c_b$, výška 2. kužele $v_2 = c_a$

kde c_a, c_b jsou úseky podle Eukl. v. $\Rightarrow$ viz Př. 50

$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}4^2 \cdot \frac{16}{5} + \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}4^2 \cdot \frac{9}{5} \doteq \underline{\underline{30{,}1\ cm^3}}$

S podobně

8. ANALYTICKÁ GEOMETRIE (JEN V ROVINĚ)

$A[a_1, a_2]$ $B[b_1, b_2]$

1) střed úsečky AB : $S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right]$

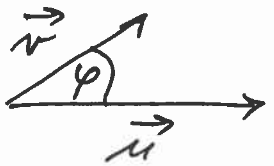
2) velikost úsečky AB = velikost vektoru $\vec{u} = \vec{AB}$

$\vec{u} = \vec{AB} = B - A = (\underbrace{b_1 - a_1}_{u_1}, \underbrace{b_2 - a_2}_{u_2})$ $|\vec{AB}| = |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

3) $\vec{u} = (u_1, u_2)$ skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ jsou-li $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

4) úhel dvou vektorů



$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$ v OR

$$\left.\begin{array}{l} p \parallel q \Rightarrow k_1 = k_2 \\ p \perp q \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \end{array}\right\} \text{ST}$$

5) přímka : $A[a_1, a_2]$ $\vec{u} = (u_1, u_2) = (-b; a)$

PV: $x = a_1 + t u_1$
$y = a_2 + t u_2$

OR : $ax + by + c = 0$

ST : $y = kx + q$

$\boxed{\text{Př. 54.}}$ Sestavte obecnou rovnici přímky, ~~která~~ je dána

a) bodem $A[-3;2]$ a normálovým vektorem $\vec{n}=(2;1)$

b) bodem $A[3;-1]$ a směrovým vektorem $\vec{u}=(3;-2)$

c) parametrickým vyjádřením $x=2-t$, $y=-3+2t$

a) OR: $ax+by+c=0$

a, b jsou přímo souřadnice normálového vektoru

$2x+y+c=0$ $\qquad c=4$

$A:\ 2(-3)+2+c=0$ $\qquad p:\ \underline{\underline{2x+y+4=0}}$

b) směrový vektor $\vec{u}=(3;-2)=(-b;a) \Rightarrow a=-2 \quad b=-3$

$-2x-3y+c=0$ $\qquad c=3$

$A:\ -2\cdot 3-3\cdot(-1)+c=0$ $\qquad p:\ \underline{\underline{-2x-3y+3=0}}$, resp. $\underline{\underline{2x+3y-3=0}}$

c) z PV určíme bod $A[2;-3]$ a směrový vektor $\vec{u}=(-1;2)=(-b;a)$

$a=2 \quad b=1$

$2x+y+c=0$ $\qquad c=-1$

$A:\ 2\cdot 2-3+c=0$ $\qquad p:\ \underline{\underline{2x+y-1=0}}$

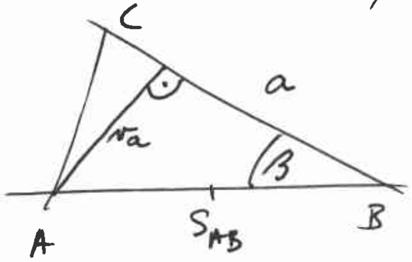
Př. 55. V trojúhelníku ABC kde $A[-1;1]$ $B[2;3]$ $C[-3;2]$

urči a) střed úsečky AB

b) úhel β

c) ob. rovnici výšky v_a

⇒ črtneme Δ, není nutné zakreslovat do souřadnic



a) $S_{AB}\left[\frac{-1+2}{2};\frac{1+3}{2}\right]$ $\qquad$ $S_{AB}\left[\frac{1}{2};2\right]$

b) úhel β je mezi vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} \overset{A-B}{=} (-3;-2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = C-B = (-5;-1)$

$|BA| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|BC| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13}$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|BA|\cdot|BC|} = \frac{(-3)\cdot(-5)+(-2)(-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} = \frac{15+2}{13\cdot\sqrt{2}} = \frac{17}{13\cdot\sqrt{2}} = 0{,}925 \Rightarrow \beta = 22{,}4°$$

c) výška v_a je kolmá na BC ⇒ směrový vektor výšky v_a je normálový vektor BC, resp. normálový vektor výšky v_a je směrový BC

$n_{v_a} = s_{BC} = \overrightarrow{BC} = (C-B) = (\overset{a}{-5};\overset{b}{-1})$

výška má rovnici $\quad -5x - y + c = 0$

a prochází bodem A: $\quad -5\cdot(-1) - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -4$

$v_a: -5x - y - 4 = 0$

$5x + y + 4 = 0$