Matematika – přehled definic pro maturanty (zpracoval Adam Vacek)

LOGIKA A MNOŽINY

Výrokem je každá oznamovací věta, která srozumitelně sděluje něco, co může být jen pravdivé (pak pravdivostní hodnotu výroku označujeme číslem 1 – pravda), nebo nepravdivé (pravdivostní hodnota výroku je označena číslem 0 – nepravda).

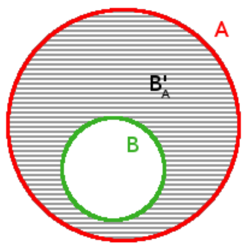
Negací výroku A je výrok, který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok A. Negaci výroku A označujeme ˥A.

Důkazy matematických vět:

1. **Přímý důkaz** implikace A ⇒B se provádí pomocí řetězce pravdivých implikací.
   $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots A_n \Rightarrow B$
2. **Nepřímý důkaz** implikace A ⇒B provádíme jako přímý důkaz její obměny ˥B⇒˥A, neboť obě jsou ekvivalentní.
3. **Důkaz sporem** výroku V (např. A ⇒B) se provádí tak, že se daný výrok V neguje a pomocí řetězce implikací se dospěje k logickému sporu. Ze sporu vyplývá, že negované tvrzení ˥V neplatí, musí tedy platit původní výrok V.
4. **Matematická indukce** spočívá ve dvou krocích: 1. krok – dokážeme, že věta platí pro konkrétní číslo (n=1) a 2. krok – dokážeme, že věta platí pro n+1-vý člen, z čehož vyvodíme, že věta platí i pro n-tý člen.

Množinou rozumíme soubor libovolných, navzájem různých objektů, které mají určitou vlastnost V. Množina je určená, jestliže o každém objektu množiny – **prvku množiny** – lze jednoznačně rozhodnout, zda danou vlastnost V má, nebo nemá.

Doplněk množiny B v množině A tvoří všechny prvky, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Značíme $\mathbf{B'_A}$.



Komplexním číslem a nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel a_1, a_2[zapisujeme $a=(a_1;a_2)$], kde a_1 je reálná část, a_2 imaginární část komplexního čísla a.

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY, ROVNICE A NEROVNICE

Algebraický výraz je zápis, který je správně vytvořený z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Neobsahuje-li algebraický výraz odmocniny, nazývá se racionální algebraický výraz (výraz s odmocninami se nazývá iracionální).

Rovnice o jedné neznámé x: Nechť f a g jsou funkce proměnné x definované na množině D∈R. Všechna x∈D, pro která platí f(x) = g(x) se nazývá rovnice o jedné neznámé x.

Lineární rovnice o jedné neznámé x∈R lze psát ve tvaru ax+b=0, kde a, b ∈ R, a≠0. Má právě jeden kořen $x= -b/a$.

Kvadratickou rovnici o jedné neznámé x∈**C**(x∈**R**) lze psát ve tvaru $ax^2+bx+c=0$, kde a, b, c jsou reálná čísla, a≠0.

Rovnice s neznámou v odmocněnci obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Odmocniny odstraňujeme neekvivalentní úpravou (umocněním), proto je zkouška nezbytnou součástí řešení těchto rovnic.

Soustava rovnic: Několik rovnic o dvou a více neznámých, které mají být splněny současně, tvoří soustavu rovnic. Řešením soustavy rovnic je průnik řešení jednotlivých rovnic.

Rovnice s parametrem obsahuje kromě neznámých další proměnné, kterým se říká parametry. Je to zápis množiny všech rovnic, které bychom získali dosazením všech hodnot, jichž mohou parametry nabývat. Řešení rovnic s parametry spočívá v určení jejich kořenů v závislosti na přípustných hodnotách parametrů. Výsledek se shrnuje do tabulky.

Nerovnice: Jsou-li f,g funkce proměnné x definované na množině **D** ∈ **R**, pak všechna $x \in$ **D**, která po dosazení do jednoho ze vztahů $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ dají pravdivou nerovnost, je nerovnice s neznámou x.

FUNKCE

Reálná funkce reálné proměnné x: Mějme **A** a **B** neprázdné množiny reálných čísel. Přidáme-li každému číslu $x \in$ **A** podle nějakého předpisu právě jedno číslo $y \in$ **B**, které označíme y=f(x), pak množina f uspořádaných dvojic [x; f(x)] se nazývá reálná funkce reálné proměnné x (stručně funkce f). Zapisujeme f: y=f(x).

Rovnost, součet, rozdíl, součin a podíl funkcí: Nechť f a g sou dvě funkce s definičními obory **D**(f) a **D**(g) a platí **A** ∈ **D**(f) ∩ **D**(g) (**A** ≠ ∅). Pak zavádíme na množině **A**:

Rovnost funkcí: $f=g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{A}: f(x) = g(x)$

Součet funkcí: $s = f+g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{A}: s(x) = f(x) + g(x)$

Analogicky definujeme rozdíl f - g, součin f*g a pro všechna x∈**A**, pro která je g(x) ≠ 0 i podíl f/g.

Rostoucí a klesající funkce: Funkce f definovaná na množině **A**∈**D**(f) se nazývá funkce na **A**:

Rostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in \mathbf{A}: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Klesající $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in \mathbf{A}: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Neklesající $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in \mathbf{A}: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Nerostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in \mathbf{A}: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Prostá $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in \mathbf{A}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sudá a lichá funkce: Funkce f, jejíž **D**(f) je souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. pro kterou platí x∈**D**(f) ⇒(-x)∈**D**(f) se nazývá:

Sudá funkce $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{D}(f): f(-x) = f(x)$

Lichá funkce $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{D}(f): f(-x) = -f(x)$

Omezenost: Je-li funkce f definovaná v množině **A**∈**D**(f), pak se nazývá:

Zdola omezená na **A** právě když existuje takové číslo d∈**R**, že pro ∀x ∈**A**: f(x) ≥ d

Shora omezená na **A** právě když existuje takové číslo h∈**R**, že pro ∀x ∈**A**: f(x) ≤ h

Omezená na **A**, právě když je na **A** omezená shora i zdola.

Maximum, minimum: Je-li funkce f, **A**∈**D**(f), a∈**A**, b∈**A**, pak má funkce na **A**:

Maximum v bodě b (největší hodnotu), právě když pro všechna x∈**A** je f(x) ≤ f(b).

Minimum v bodě a (nejmenší hodnotu), právě když pro všechna x∈**A** je f(x) ≤ f(a).

Periodická funkce je funkce f, pokud existuje takové p>0, že pro každé k∈**Z** platí:

1. Je-li funkce definována v bodě x, pak je také definována v bodech (x+kp)
2. Pro všechna x∈**D**(f) platí: f(x) = f(x+kp).

Inverzní funkce: Jestliže funkce y=f(x) je prostá v celém definičním oboru **D**(f) a má obor hodnot **H**(f), pak lze na **H**(f) definovat funkci, která každému číslu y∈**H**(f) přiřazuje právě to číslo x∈**D**(f), pro které je f(x)=y a která se nazývá inverzní funkce k funkci f a značí se f^{-1}.

Polynomická funkce (celá racionální) je každá funkce f proměnné x∈**R**, kterou lze vyjádřit ve tvaru: f: $y=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ kde n∈**N**, $a_n,\ldots,a_0$∈**R**. (Má speciální případy, funkci lineární a kvadratickou.)

Lineární funkce je každá funkce f daná předpisem f: y = ax+b, kde a∈**R** ∩ a ≠ 0, b∈**R**.

Kvadratická funkce je funkce f: $y = ax^2 + bx + c$, kde a∈**R** – {0}, b∈**R**, c∈**R**.

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce f:$y=x^n$, n∈**N**.

Mocninná funkce se záporným celým exponentem je funkce f: $y=x^{-n}$, n∈**N**.

Lomená racionální funkce: Lomenou racionální funkcí f, danou předpisem f: $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}}$, kde P(x),Q(x) jsou nesoudělné polynomy, Q(x) není nulový polynom.

Exponenciální funkce o základu a je dána předpisem: f: $y=a^x$, kde a>0 ∩ a≠1.

Logaritmická funkce o základu a, kde a>0 ∩ a≠1, je funkce inverzní k exponenciální funkci o témže základu. Označuje se f: $y=\log_a x$.

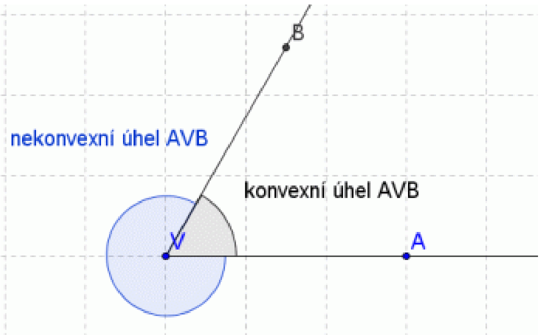
GONIOMETRIE

- **Orientovaným úhlem** AVB (stručně $\angle AVB$.) nazýváme uspořádanou dvojicí polopřímek VA, VB se společným počátkem V, kde VA je počáteční rameno, VB koncové rameno a bod V vrchol orientovaného úhlu.

ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE

Úhel konvexní: $\angle AVB$. Je průnik dvou polorovin: $\angle AVB$. = →AVB ∩ →VBA.

Úhel nekonvexní: : $\angle AVB$je sjednocení polorovin opačných k polorovinám →AVB a →BVA.



Trojúhelník je průnik tří polorovin: ΔABC= →ABC ∩ →CBA ∩→ACB

Čtyřúhelník ABCD je průnik čtyř polorovin (analogicky)

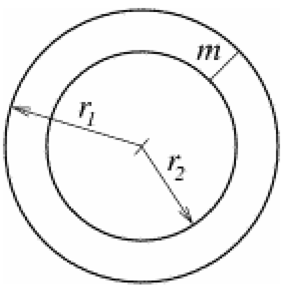
Kružnicí k se středem S a poloměrem r nazýváme množinu všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S konstantní vzdálenost r>0.

Kruhem se středem S a poloměrem r nazýváme množinu všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S vzdálenost nejvýše rovnu r>0.

Kruhovou výsečí nazýváme průnik kruhu a úhlu s vrcholem ve středu kruhu S.

Kruhovou úsečí nazýváme průnik kruhu a poloroviny, jejíž hraniční přímka má od středu kruhu S vzdálenost menší než jeho poloměr.

Mezikruží je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S zvaného střed mezikruží vzdálenost alespoň r_2 a nejvýše r_1.



Shodné zobrazení: Geometrické zobrazení v rovině nazýváme shodným zobrazením (shodností), je-li každému bodu X roviny přiřazen právě jeden obraz X’ tak, že pro každé dvě uspořádané dvojice [X;X’] a [Y;Y’] vzorů a obrazů platí: |X’Y’| = |XY|

Identita: je zvláštním případem shodnosti, při němž obrazem každého bodu X roviny je tentýž bod X’=X.

Posunutí (translace) T je přímá shodnost, která je jednoznačně určena nenulovým vektorem posunutí**u=AA'.** Každému bodu roviny X je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí **XX'= u**.

Otočení (rotace) R je shodné zobrazení, jednoznačně určené středem otáčení **S** a orientovaným úhlem otočení **α**, jehož velikost je z intervalu (0°;360°>. Bodu S je přiřazen týž bod S'= S a každý bod roviny X ≠ S má obraz X', pro který platí |SX| = |SX'| a úhel XSX' = **α**.

Středová souměrnost S se středem S je přímá shodnost, která středu S přiřazuje týž bod S'= S a každému bodu roviny X ≠ S přiřazuje takový bod X', že bod S je středem úsečky XX'.

Osová souměrnost O s osou o je nepřímá shodnost, která je jednoznačně určená osou souměrnosti o. Leží-li bod X na ose o, pak jeho obraz X'=X. Obrazem bodů X∉o jsou body X', které leží na kolmici k ose o, přičemž úsečka XX'je osou půlena.

Podobnost: Geometrické zobrazení v rovině nazýváme podobným zobrazením (podobností), je-li každému bodu roviny X přiřazen jeho obraz X' tak, že pro každé dvě uspořádané dvojice [X;X'] a [Y;Y'] vzorů a obrazů platí: |X'Y'| = k|XY|, kde k>0 je konstanta zvaná koeficient podobnosti.

Stejnolehlost (homotetie) H(S;λ) se středem **S** a koeficientem stejnolehlosti (**λ** ∈ **R** – {0}) je podobné zobrazení v rovině, které bodu S přiřazuje jeho obraz S'= S a každému bodu roviny X≠S přiřazuje bod X' takový, že pro vektory **SX** a **SX'** platí: **SX'= λ SX.**

Mnohostěn je množina všech bodů v prostoru ležících uvnitř a na mnohostěnové ploše, která je sjednocením n hraničních mnohoúhelníků (n≥4) ležících v různých rovinách tak, že strana každého z nich je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku.

Rotační tělesa vzniknou rotací vhodného rovinného útvaru kolem osy o.

Vzájemná poloha přímek a rovin v prostoru.

Přímky různoběžky mají-li společný právě jeden bod.

Přímky rovnoběžkyleží-li v jedné rovině a nemají společný žádný bod.

Přímky mimoběžkyneleží-li v jedné rovině a nemají společný žádný bod.

Přímka p leží v rovině α je-li každý bod přímky bodem roviny (p ∈ α)

Přímka p je rovnoběžná s rovinou α nemá-li s rovinou žádný společný bod (p ∩ α = ∅)

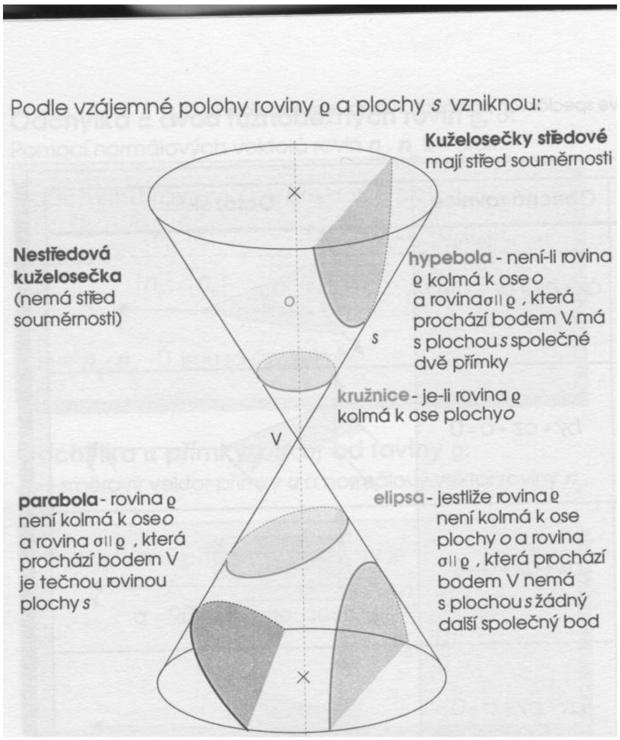
Přímka p je různoběžná s rovinou α má-li s rovinou právě jeden společný bod (P = p ∩ **φ**)

Rovnoběžné roviny: pokud nemají žádný společný bod.

Různoběžné roviny: mají společnou přímku zvanou průsečnice rovin.

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Kuželosečky:



Kružnice: je množina bodů ve vzdálenosti $r > 0$ od středu S ležících v jedné rovině.

Elipsa: Všechny body elipsy leží v jedné rovině a mají od dvou různých bodů E, F zvaných **ohniska** stálý součet vzdáleností, který je větší než vzdálenost těchto ohnisek. Odtud platí charakteristická vlastnost elipsy. $|EM|+|FM| = 2a$

Hyperbola je množina všech bodů M[x;y] v rovině, pro které je absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od ohnisek E,F rovna kladné konstantě ($2a<|EF|$): $||ME| - |MF|| = 2a$

Parabola: Všechny body paraboly M[x;y] mají stejnou vzdálenost od daného bodu F (ohniska) a řídící přímky ***d***, která ohniskem neprochází: $v(M, d) = |MF|$

Tečna kuželosečky je přímka, která neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky a má s kuželosečkou společný právě jeden bod **T** (bod dotyku).

Sečna kuželosečky s má s kuželosečkou buď společné právě dva body, nebo má s kuželosečkou společný právě jeden bod, ale není tečnou kuželosečky (Se sečnami, které mají s kuželosečkami jediný společný bod se můžeme setkat pouze u paraboly (přímka rovnoběžná s osou paraboly) a hyperboly (přímka rovnoběžná s asymptotou))

Vnější přímka kuželosečky n nemá s kuželosečkou žádný společný bod.

Polára p: Pokud existuje průsečík dvou tečen, nazývá se pól kuželosečky. Spojnice bodů dotyku těchto tečen s kuželosečkou je polára *p*.

POSLOUPNOSTI A ŘADY

Posloupnost je funkce definovaná v množině přirozených čísel **N**.

Limita posloupnosti: Říkáme, že reálné číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$,právě když ke každému reálnému číslu ε>0 existuje takové n_0∈**N**, že pro všechna přirozená čísla $n>n_0$ je $a_n \in (a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, tj. platí $|a_n - a|<\varepsilon$. Zapisujeme $\mathbf{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$.

Nekonečná řada: Je-li $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$,posloupnost, která má členy $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$,pak výraz $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazýva nekonečná řada. Číslům $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ se říká členy nekonečné řady.

KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST, STATISTIKA

Variace k-té třídy z n prvků bez opakování dané základní n-prvkové množiny (0 ≤ k ≤ n) je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že záleží na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Permutace: Je-li n=k, pak variace bez opakování n-té třídy z n prvků se nazývají permutace bez opakování.

Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování dané základní n-prvkové množiny (0 ≤ k ≤ n) je každá k-tice různých prvků sestavená z prvků základní množiny tak, že nezáleží na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pravděpodobnost: Nechť je zaveden náhodný jev P(A) jako poměr počtu m všech výsledků příznivých jevů A k počtu n všech možných výsledků náhodného pokusu, pak platí: **P(A)=m/n**

Statistický soubor je konečná neprázdná množina **M** objektů statistického pozorování shromážděných na základě toho, že mají jisté společné vlastnosti. Prvky této množiny jsou nazývány prvky statistického souboru (statistické jednotky). Počet všech prvků statistického souboru se nazývá rozsah souboru n.

Statistický znak x je společná vlastnost prvků statistického souboru, jejíž proměnost je předmětem statistického zkoumání. Jednotlivé údaje znaku se nazývají hodnoty znaku a značí se $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Znaky kvantitativní mají hodnoty vyjádřeny číslem (např. výška, počet žáků), znaky kvalitativní slovním popisem (např. muž-žena, povolání).

Absolutní četnost hodnoty znaku x_i je číslo, které udává, kolikrát se v souboru **M** vyskytuje hodnota znaku x_i. Značí se n_i.

Relativní četnosthodnoty znaku x_i je dána podílem n_i/n, kde n_i je absolutní četnost hodnoty znaku x_i, n rozsah souboru **M**. Udává se zpravidla v procentech.

ZÁKLADY DIFERENCIÁLNÍHO A INTEGRÁLNÍHO POČTU

Limita funkce: Říkáme, že funkce f má v bodě a ∈ **R**,v němž nemusí být definována, limitu L ∈ **R**, právě když ke každému číslu ε existuje takové kladné číslo δ, že pro všechna x≠a z δ okolí bodu a leží funkční hodnoty f(x) v ε-okolí bodu L. Skutečnost, že má funkce f v bodě a limitu L zapisujeme: $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$

Spojitost funkce: Funkce f je v bodě a ∈ **R** spojitá, právě když existuje $\lim_{x\to a} f(x)$a platí: $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{f(a)}$

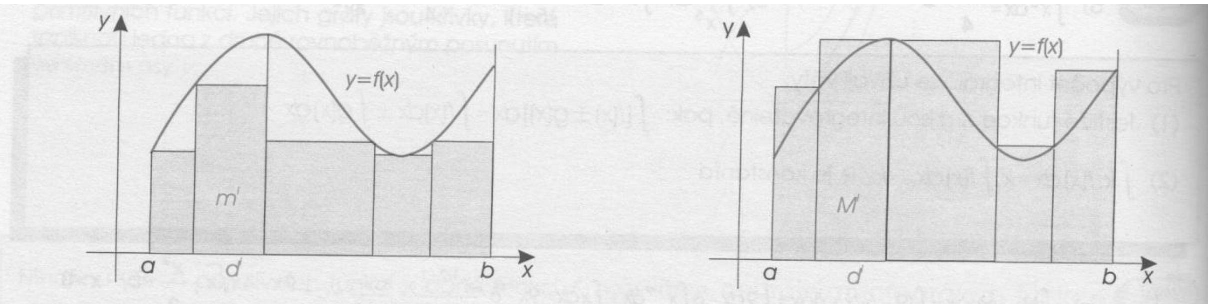
Derivace funkce: Je-li funkce f definována v okolí bodu x_0a existuje-li limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, potom tuto limitu označujeme f'(x_0) a nazýváme ji derivací funkce f v boděx$_0$.

Primitivní funkce: Funkce F se nazývá primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a;b), jestliže pro každé x ∈ (a;b) platí: F'(x) = f(x).

Neurčitý integrál: Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci f nazýváme neurčitým integrálem funkce f a zapisujeme: $\int f(x)dx = F(x) + c$**,** přičemž F'(x) = f(x), c ∈ **R**.

Funkce **f** se nazývá integrand (integrovaná funkce), x integrační proměnná, c integrační konstanta.

Určitý integrál:



❑ Pro dané dělení D intervalu ⟨a;b⟩ dostaneme *dolní integrální součet* $s_n(f,D)=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i$ a *horní integrální součet* $S_n(f,D)=\sum_{i=1}^{n} M_i d_i$. Jestliže n jde k nekonečnu a délky všech intervalů jdou k nule, pak oba součty mají tutéž limitu. Její hodnota udává hledaný obsah obrazce a nazývá se **určitý integrál funkce f od a do b**.