Matematika – přehled vzorců pro maturanty (zpracoval T. Jánský)

Úpravy výrazů

$a^r . a^s = a^{r+s}$

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$(a^r)^s = a^{r.s}$

$(a.b)^r = a^r \cdot b^r$

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[k.n]{a^k}$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B)$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$A^3 + B^3 = (A+B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$

Binomická věta

$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n}\cdot b^n$

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ P: $a \neq 0$

Diskriminant: $D = b^2 - 4ac$

$D > 0$ … $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0$ … $x_{1/2} = \frac{-b}{2a}$

$D < 0$ … $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}i}{2a}$

Vietovy vzorce: platí pro **NORMOVANÝ TVAR!!!** kvadratické rovnice:

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$x_1 . x_2 = q$

$x_1 + x_2 = -p$

Logaritmy

$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$

$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

$\log a^x = x . \log a$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$a^{\log_a r} = r$

$(\log_a x = y) \leftrightarrow (a^y = x)$

$\ln x = \log_e x$

Goniometrie

x	0 | 2π	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3. π/2
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Komplexní čísla

$z = a + bi$ …algebraický tvar komplexního čísla

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ …goniometrický tvar komplexního čísla

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru:

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$$

Moivreova věta:

$$[|z|.(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n.[\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)]$$

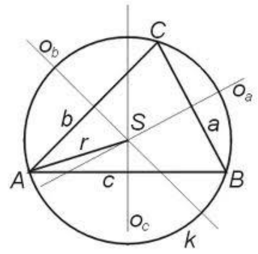
Binomická rovnice: $x^n = a$

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}.\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0; 1; 2; \dots; n-1$$

Obecný trojúhelník

Sinová věta: $\frac{a}{\sin\,\alpha} = \frac{b}{\sin\,\beta} = \frac{c}{\sin\,\gamma} = 2r$ r … poloměr kružnice opsané

Kosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$$1° = \frac{\pi}{180}\,rad$$

$$1\,rad = \frac{180°}{\pi} \doteq 57°17'45''$$

$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (CZ)

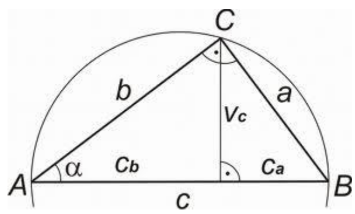
Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s = \frac{a+b+c}{2}$

$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ poloměr kružnice opsané

$\rho = \frac{S}{s}$ poloměr kružnice vepsané

Pravoúhlý trojúhelník

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$



Euklidova věta pro výšku: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$

Euklidova věta pro odvěsnu: $a^2 = c \cdot c_a$

$$b^2 = c \cdot c_b$$

Goniometrické vzorce:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

Obvod, obsah, objem, povrch

Trojúhelník: $o = a + b + c$

$$S = \frac{a + v_a}{2}$$

Čtverec: $o = 4 \cdot a$

$$S = a^2$$

Kosočtverec: $o = a + b + c + d$

$$S = a \cdot v_a = a^2 \cdot \sin\alpha$$

Obdélník: $o = 2(a + b)$

$$S = a.b$$

Kosodélník: $o = a + b + c + d$

$$S = a.v_a = a.b.\sin\alpha$$

Lichoběžník: $o = a + b + c + d$

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2} = m \cdot v$$

m … střední příčka

Deltoid: $o = 2(a + b)$

$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$

e,f … úhlopříčky

Kružnice: $o = 2\pi r$

$$S = \pi r^2$$

Krychle: $V = a^3$

$$S = 6 \cdot a^2$$

Kvádr: $V = a \cdot b \cdot c$

$$S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

Hranol: $V = S_p \cdot v$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

Jehlan: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$$S = S_p + S_{pl}$$

Válec: $V = \pi r^2 v$

$$S = 2\pi r(r + v)$$

Kužel: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$$S = \pi r(r + s)$$

Koule: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$S = 4\pi r^2$$

Analytická geometrie

Vektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$

Vzdálenost bodů: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Střed úsečky: $S\left[\frac{b_1+a_1}{2}; \frac{b_2+a_2}{2}; \frac{b_3+a_3}{2}\right]$

Skalární součin: $\vec{u}.\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

Vektorový součin: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

$$w_1 = u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3$$

$$w_2 = -(u_1 \cdot v_3 - v_1 \cdot u_3)$$

$$w_3 = u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2$$

Úhel dvou vektorů: $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Obsah rovnoběžníku: $S_{\square} = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{w}|$

Obsah trojúhelníku: $S_{\triangle} = \frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2} = \frac{|\vec{w}|}{2}$

Objem rovnoběžnostěnu: $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$

Parametrické vyjádření přímky v rovině: $x = a_1 + t \cdot u_1$

$$y = a_2 + t \cdot u_2$$

Obecná rovnice přímky v rovině: $ax + by + c = 0$

Směrnicový tvar přímky v rovině: $y = kx + q$ … rovnoběžnost dvou přímek: $k_1 = k_2$

… kolmost dvou přímek: $k_1.k_2 = -1$

Úsekový tvar přímky v rovině: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Vzdálenost bodu od přímky v rovině: $v(P;p) = \frac{|a.p_1 + b.p_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Parametrické vyjádření přímky v prostoru: $x = a_1 + t \cdot u_1$

$$y = a_2 + t \cdot u_2$$

$$z = a_3 + t \cdot u_3$$

Parametrické vyjádření roviny: $x = a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$

$y = a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$

$z = a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$

Obecná rovnice roviny: $ax + by + cz + d = 0$

Vzdálenost bodu od roviny: $v(P;\rho) = \frac{|a.p_1 + b.p_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Odchylka přímky od roviny: $\cos\varphi' = \frac{|\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\rho}|}{|\overrightarrow{u_p}|.|\overrightarrow{n_\rho}|}$ $\varphi = 90° - \varphi'$

Odchylka dvou rovin: $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_\sigma} \cdot \overrightarrow{n_\rho}|}{|\overrightarrow{n_\sigma}|.|\overrightarrow{n_\rho}|}$

Kuželosečky

Kružnice:

Středový tvar: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

Obecná rovnice: $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$

Tečna: $(x-m).(x_0-m) + (y-n).(y_0-n) = r^2$

Elipsa

$e^2 = a^2 - b^2$

Středový tvar: 1) $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

2) $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Tečna: $\frac{(x-m).(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n).(y_0-n)}{b^2} = 1$

Parabola

$p = v(F; d)$

$V = S_{Fd}$

Středový tvar: 1) $(x-m)^2 = 2p(y-n)$

2) $(x-m)^2 = -2p(y-n)$

3) $(y-n)^2 = 2p(x-m)$

4) $(y-n)^2 = -2p(x-m)$

Tečny: 1) $(x-m)(x_0-m) = \pm p(y-n) \pm p(y_0-n)$

2) $(y-n)(y_0-n) = \pm p(x-m) \pm p(x_0-m)$

Hyperbola

$e^2 = a^2 + b^2$

Rovnice asymptot: $y - n = \pm \frac{b}{a}(x-m)$

Středový tvar: 1) $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

2) $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$

Tečny: 1) $\frac{(x-m).(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n).(y_0-n)}{b^2} = 1$

2) $\frac{(y-n).(y_0-n)}{a^2} - \frac{(x-m).(x_0-m)}{b^2} = 1$

Kombinatorika

Variace

Bez opakování:$V(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

S opakováním: $V^{'}(k;n) = n^k$

Permutace

Bez opakování: $P(n) = n!$

S opakováním: $P^{'}(k_1;k_2;\dots;k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$

Kombinace

Bez opakování: $C(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

S opakováním: $C^{'}(k;n) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$

Kombinační číslo:$\binom{n}{1} = n$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pravděpodobnost

$P(A) = \frac{m}{n}$ m …. počet příznivých jevů

n … počet všech jevů

Průnik dvou nezávislých jevů: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Statistika

Relativní četnost: $\nu_i = \frac{n_i}{n}$ n … počet všech prvků

Aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Geometrický průměr: $\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}$

Harmonický průměr: $\overline{x_H} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}$

Modus: $Mod(x)$ … hodnota s nejvyšší četností

Medián: $Med(x) = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ … pro *n* liché

$Med(x) = \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$ … pro *n* sudé

Rozptyl: $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Směrodatná odchylka: $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Variační koeficient: $v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$

Koeficient korelace: $r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}).(y_i-\bar{y})}{s_x . s_y}$ …… $r \in \langle -1; 1\rangle$

Aritmetická posloupnost

Vzorec mezi a_n a a_{n+1} : $a_{n+1} = a_n + d$

Vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Vzorec mezi dvěma členy: $a_r = a_s + (r-s)d$

Součtový vzorec: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost

Vzorec mezi a_n a a_{n+1} : $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Vzorec mezi dvěma členy: $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Součtový vzorec: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Limita posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \pm \lim_{n\to\infty} (b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) . \lim_{n\to\infty} (b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} (a_n)}{\lim_{n\to\infty} (b_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Podmínka konvergence: $|q| < 1$

Součtový vzorec: $s = \frac{a_n}{1-q}$