Iracionální rovnice (neznámá je pod odmocninou)

Příklady označené OA jsou ze sbírky úloh pro obch. akademie str. 40.

Příklad 41 (OA) a jeho řešení:

$\sqrt{2(x-3)} = 3-x$ Obě strany rovnice umocníme na druhou.

$$\left(\sqrt{2(x-3)}\right)^2 = (3-x)^2$$

$$2(x-3) = 9-6x+x^2$$

$$x^2-8x+15=0$$

$$x_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2} = \frac{8\pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

Podmínka: $D \geqq 0$

$$2(x-3) \geqq 0$$

$$2x-6 \geqq 0$$

$$x \geqq 3$$

Protože jsme provedli úpravu rovnice, která není ekvivalentní, tak je třeba vždy provést zkoušku (já ji budu z časových důvodů obvykle vynechávat.

Zkouška:

Pro $x_1=5$: $L(5) = \sqrt{2(5-2)} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$, $P(5) = 3-5 = -2$ $\Big\}$ $L \neq P \Rightarrow 5$ není kořenem dané rovnice

Pro $x_2=3$: $L(3) = \sqrt{2(3-3)} = \sqrt{0} = 0$, $P(3) = 3-3 = 0$ $\Big\}$ $L = P \Rightarrow 3$ je kořenem rovnice, vyhovuje i podmínce.

$\boxed{K = \{3\}}$ K… je množina kořenů rovnice.

Příklad 42 (OA):

$$\sqrt{x^2-6x+9} = 4$$

$$x^2-6x+9 = 16$$

$$x^2-6x-7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2} = \frac{6\pm 8}{2} = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$\boxed{K = \{-1; 7\}}$

Ověř zkouškou.

Podmínka: $x^2-6x+9 \geqq 0$ ①

$$x^2-6x+9=0$$

$$x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2} = \frac{6\pm 0}{2} = 3 \quad \text{do ①}$$

$$x^2-6x+9 \geqq 0$$

$$(x-3)\cdot(x-3) \geqq 0$$

$$\left[(x-3)\geqq 0 \wedge (x-3)\geqq 0\right] \vee \left[(x-3)<0 \wedge (x-3)<0\right]$$

$$x \geqq 3 \quad \vee \quad x < 3$$

Kořeny 7, −1 podmínce vyhovují.

Příklad 43 (OA)

$$\frac{\sqrt{4x-3}}{2} = \frac{x}{2} - 1$$

Podmínka: $4x-3 \geqq 0$

$4x \geqq 3$

$x \geqq \frac{3}{4}$

$$\frac{4x-3}{4} = \left(\frac{x}{2}-1\right)^2$$

$$\frac{4x-3}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1 \quad |\cdot 4$$

$$4x-3 = x^2-4x+4$$

$$x^2-8x+7=0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

$$\boxed{K=\{7\}}$$

Zkouška:

$L(7) = \frac{\sqrt{4.7-3}}{2} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2}$

$P(7) = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

$L \neq P \Rightarrow$ 7 je kořen...

$L(1) = \frac{\sqrt{4.1-3}}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\pm 1}{2}$

$P(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$L \neq P$, 1 není kořen

Příklad 44 (OA)

$$x + \sqrt{x^2-9} = 21$$

$$\sqrt{x^2-9} = 21-x$$

$$x^2-9 = (21-x)^2$$

$$\cancel{x^2}-9 = 441-42x+\cancel{x^2}$$

$$42x = 450$$

$$x = \frac{75}{7} \left(10\tfrac{5}{7}\right)$$

Podmínka $x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$\Rightarrow x \neq \pm 3$

$$\boxed{K=\left\{\frac{75}{7}\right\}}$$

Příklad 45 (OA) – obtížný:

$$\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}} = 2x+1$$

$$\sqrt{2x\cdot 2x-\sqrt{4.2x+5}} = 2x+1 \quad \text{Substituce } \boxed{2x=y}$$

$$\sqrt{y\cdot y-\sqrt{4y+5}} = y+1$$

$$\sqrt{y^2-\sqrt{4y+5}} = y+1 \quad \text{... umocníme}$$

$$y^2-\sqrt{4y+5} = (y+1)^2$$

$$-\sqrt{4y+5} = \cancel{y^2}+2y+1-\cancel{y^2}$$

$$-\sqrt{4y+5} = 2y+1 \quad |\cdot(-1)$$

$$\sqrt{4y+5} = -2y-1 \quad \text{... opět umocníme}$$

$$4y+5 = (-2y-1)^2$$

$$4y+5 = 4y^2+4y+1$$

$$4y^2 = 4$$

$$y = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Big\} \text{dosadíme zpět do substituce}$$

$2x=y$

$2x=1$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

$2x=y$

$2x=-1$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

Zkouška pro $x=\frac{1}{2}$ je na další straně.

$$L\left(\tfrac12\right)=\sqrt{4\cdot\left(\tfrac12\right)^2-\sqrt{8\cdot\tfrac12+5}}=\sqrt{4\cdot\tfrac14-\sqrt{4+5}}=\sqrt{1-\sqrt9}=\sqrt{1-(\pm3)}=$$

$=\sqrt{1+3}=\sqrt4=2$ nebo $\sqrt{1-3}$ v R nemá řešení

$$P\left(\tfrac12\right)=2\cdot\tfrac12+1=1+1=2$$

Pro $-\frac12$ lze ověřit, že není kořen. $K=\{\frac12\}$.

Příklad 46 (OA)

$$\underbrace{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}}_{(A+B)^2}=8$$

$$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2+2\sqrt{2x+5}\cdot\sqrt{x-1}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2=64$$

$$2x+5+2\sqrt{(2x+5)\cdot(x-1)}+x-1=64$$

$$3x+2\sqrt{2x^2+3x-5}=60$$

$$2\sqrt{2x^2+3x-5}=60-3x$$

$$4(2x^2+3x-5)=(60-3x)^2$$

$$8x^2+12x-20=3600-360x+9x^2$$

$$x^2-372x+3620=0$$

$$x_{1,2}=\frac{372\pm\sqrt{372^2-4\cdot3620}}{2}=\frac{372\pm352}{2}=\begin{cases}362\\ \boxed{10}\end{cases}$$

362 nevyhovuje, lze ověřit.

$\boxed{K=\{10\}}$

Poznámka: Př. 4 – 20 ve sbírce pro OA se mohou řešit podle předchozích vzorů.

Příklad 47 (OA): Zvětšíme-li neznámé číslo o 7 a utvoříme-li druhou odmocninu takto zvětšeného čísla, obdržíme číslo, které je o 5 menší než původní neznámé číslo. Určete je.

Řešení: $\sqrt{x+7}=x-5$

$$x+7=(x-5)^2$$

$$x+7=x^2-10x+25$$

$$x^2-11x+18=0$$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot18}}{2}=\frac{11\pm7}{2}=\begin{cases}9\\ 2\ (\text{nevyhovuje})\end{cases}$$

Zkouška: $\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$; $9-5=4$

Neznámé číslo je 9.

Příklad 49 (OA): Rozdíl dvou čísel je 48, rozdíl jejich aritmetického a geometrického průměru je 18. Která jsou to čísla?

Řešení: $x-y=48$ $\boxed{1}$ $\Rightarrow$ $x=48+y$ $\boxed{2}$

$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=18$ $\boxed{3}$ dosaď $\boxed{2}$

$$\frac{48+y+y}{2}-\sqrt{(48+y)\cdot y}=18 \;\cancel{\cdot 2}$$

$$\frac{48+2y}{2}-\sqrt{48y+y^2}=18$$

$$24+y-\sqrt{48y+y^2}=18$$

$$-\sqrt{48y+y}=-y-6 \quad |\cdot(-1)$$

$$\sqrt{48y+y^2}=y+6$$

$$48y+y^2=(y+6)^2$$

$$48y+\cancel{y^2}=\cancel{y^2}+12y+36$$

$$36y=36$$

$\boxed{y=1}$ dej do $\boxed{2}$

$$x=48+1$$

$$\boxed{x=49}$$

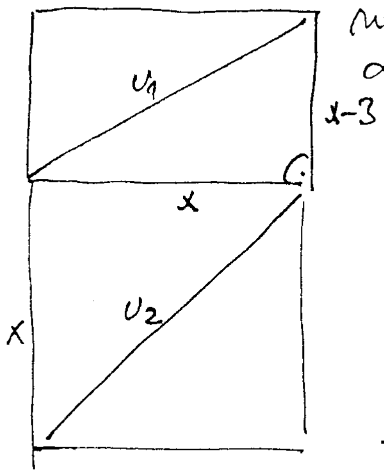
Zkouška: $49-1=48$

$$\frac{49+1}{2}-\sqrt{49\cdot1}=25-7=18$$

Jsou to čísla 1 a 49.

Příklad 50 (OA): Jedna strana obdélníku je o 3 kratší než strana druhá a jeho úhlopříčka o $\sqrt{2}$ kratší než úhlopříčka čtverce sestrojeného nad delší stranou. Urči rozměry obdélníku.

Řešení:



$$u_1=\sqrt{x^2+(x-3)^2}=\sqrt{x^2+x^2-6x+9}=\sqrt{2x^2-6x+9}$$

$$u_2=x\cdot\sqrt{2}$$

$$u_2-u_1=\sqrt{2}$$

$$x\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2x^2-6x+9}=\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2x^2-6x+9}=\sqrt{2}-x\sqrt{2} \quad |\cdot(-1)$$

$\sqrt{2x^2-6x+9}=\sqrt{2}(x-1)$ .. umocníme

$$2x^2-6x+9=[\sqrt{2}\cdot(x-1)]^2$$

$$2x^2-6x+9=2(x-1)^2$$
$$2x^2-6x+9=2(x^2-2x+1)$$
$$\cancel{2x^2}-6x+9=\cancel{2x^2}-4x+2$$
$$-2x=-7$$
$$\boxed{x=\frac{7}{2}}$$

$$x-3=\frac{7}{2}-3=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Zkouška:

$$u_1=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=$$
$$=\sqrt{\frac{2\cdot 25}{4}}=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$u_2=\frac{7}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$u_2-u_1=\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$$

Obdélník má rozměry $\frac{7}{2}$ a $\frac{1}{2}$.

Další iracionální rovnice z písemných zkoušek

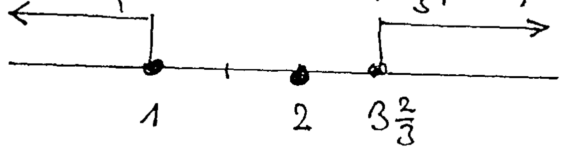
Příklad 51:

a) $\sqrt{5-5x}=\sqrt{3x-11}$

$$5-5x=3x-11$$
$$-8x=-16 \quad |:(-8)$$
$$\boxed{x=2}$$

Podmínka: $5-5x\geqq 0 \quad \wedge \quad 3x-11\geqq 0$

$$-5x\geqq -5 \quad \wedge \quad 3x\geqq 11$$
$$x\leqq 1 \quad \wedge \quad x\geqq 3\tfrac{2}{3}$$
$$(-\infty,1\rangle \quad \wedge \quad \langle 3\tfrac{2}{3},+\infty)$$



$$(-\infty;1\rangle\cup\langle 3\tfrac{2}{3},+\infty)$$

Protože $2\notin(-\infty,1\rangle\cup\langle 3\tfrac{2}{3},+\infty)$, tak $x=2$ není kořenem (či řešením dané rovnice.

---

b) $\sqrt{x+9}+3\sqrt{x}=7$

$$(\underbrace{\sqrt{x+9}}_{A}+\underbrace{3\sqrt{x}}_{B})^2=7^2$$

$$x+9+6\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+9}+9x=49$$
$$10x+6\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+9}=40 \quad |:2$$
$$5x+3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+9}=20$$

$$3x\sqrt{x+9}=20-5x \quad \text{... umocníme}$$
$$9x(x+9)=400-200x+25x^2$$
$$9x^2+81x=400-200x+25x^2$$
$$16x^2-281x+400=0$$
$$x_{1,2}=\frac{281\pm\sqrt{281^2-4\cdot 16\cdot 400}}{32}=\frac{281\pm 231}{32} \begin{cases} 16 \\ \frac{25}{16} \end{cases}$$

Zkouška na další straně.

Zkouška:

$L(16) = \sqrt{16+9} + 3\sqrt{16} = 5 + 3.4 = 17$

$P(16) = 7$; $L \neq P \Rightarrow x = 16$ není řešením dané rovnice.

$L\left(\frac{25}{16}\right) = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} + 3\sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{169}{16}} + 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{13}{4} + \frac{15}{4} = \frac{28}{4} = 7$

$P\left(\frac{25}{16}\right) = 7$; $L = P \Rightarrow x = \frac{25}{16}$ je řešením dané rovnice.

---

c) $\sqrt{x^2+9} = 5$ $\quad$ x^2+9 je definováno pro každé $x \in R$, neboť x^2 je vždy kladné číslo.

$x^2 + 9 = 25$

$x^2 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4$ $\quad$ $K = \{-4; 4\}$

---

d) $\sqrt{x^2-4x} = x-3$ $\quad$ Podmínka: $x^2 - 4x \geq 0$

$x(x-4) \geq 0$, to nastane, když

$(x>0 \wedge x-4>0) \vee (x<0 \wedge x-4<0)$

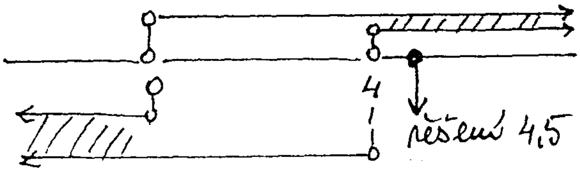
$(x>0 \wedge x>4) \vee (x<0 \wedge x<4)$

$x^2 - 4x = (x-3)^2$

$\cancel{x^2} - 4x = \cancel{x^2} - 6x + 9$

$2x = 9$

$x = \frac{9}{2}$ $(4{,}5)$



Protože $x = 4{,}5 \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$, tak $x = 4{,}5$ je řešením dané rovnice. $\quad$ $K = \{4{,}5\}$

$(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

---

e) $\sqrt{4x-6} = \sqrt{2x-4}$ $\quad$ Podmínka: $4x - 6 \geq 0 \wedge 2x - 4 \geq 0$

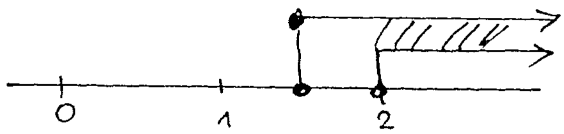
$4x \geq 6$ $\quad$ $2x \geq 4$

$x \geq 1{,}5 \wedge x \geq 2$

$4x - 6 = 2x - 4$

$2x = 2$

$\boxed{x = 1}$



Protože $x = 1 \notin \langle 2; +\infty)$, tak daná rovnice nemá řešení.

$x \in \langle 2; +\infty)$
