Nerovnice s absolutní hodnotou

a) Jednodušší typy úloh (= též učivo OA)

Definice: Absolutní hodnota $|a|$ reálného čísla a:
Je-li $a \geq 0$, pak $|a| = a$.
Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$

Volná interpretace: Abs. hodnotu reálného čísla si představujeme jako vzdálenost tohoto čísla od počátku číselné osy.

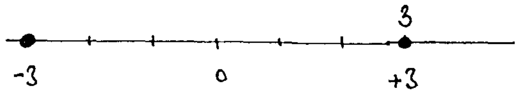
Příklad 16: Vypočítejte:

$|3| = 3$, $|-1{,}5| = 1{,}5$, $|0| = 0$, $|9-2| = |7| = 7$, $|3-4{,}8| = |-1{,}8| = 1{,}8$

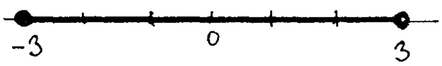
$|7 - |4-11|| = |7 - |-7|| = |7-7| = 0$

Příklad 17: Vyznačte na číselné ose všechna reálná čísla, pro která platí:

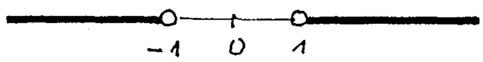
a) $|x| = 3$



b) $|x| \leq 3$



c) $|x| > 1$



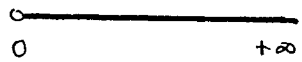
Příklad 18: Na číselné ose vyznačte obrazy všech reálných čísel, pro která platí:

---

a) $|x| < 0$ ... nerovnice nemá řešení, protože abs. hodnota nemá záporné číslo.

---

b) $|x| > 0$ ... $x \in R^+ - \{0\}$, $x \in (0, +\infty)$



---

c) $|x-4| = 3$

1. způsob řešení:

I. Je-li $x - 4 \geq 0$, pak $|x-4| = x-4$ a platí $x - 4 = 3$

$\boxed{x = 7}$

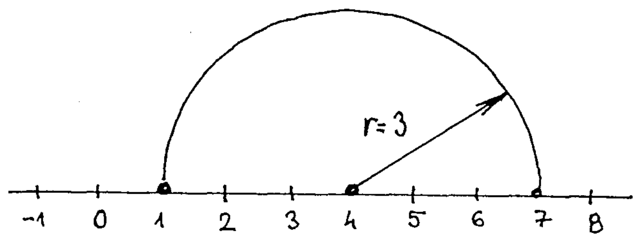
II. Je-li $x-4<0$, pak $|x-4| = -x+4$ a platí: $-x+4=3$

$\boxed{x=1}$

Výsledek: $x \in \{1;7\}$

2. způsob řešení:

Rovnice $|x-4|=3$ znamená, že vzdálenost neznámého čísla $\underline{x}$ od čísla 4 se rovná 3.



jsou to čísla 1 a 7.

---

d) $|x-2| \leqq 5$, tj. vzdálenost neznámého čísla $\underline{x}$ od čísla 2 je $\leqq 5$.

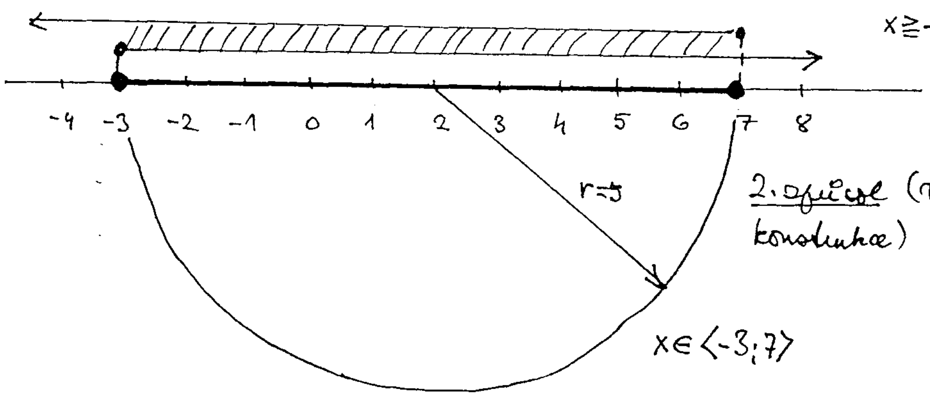
1. způsob: I. Je-li $x-2 \geqq 0$, pak $|x-2| = x-2$ a platí: $x-2 \leqq 5$

$x \leqq 7$

II. Je-li $x-2<0$, pak $|x-2| = -x+2$ a platí: $-x+2 \leqq 5$

$-x \leqq 3 \quad |\cdot(-1)$

$x \geqq -3$



2. způsob (viz konstrukce)

$x \in \langle -3;7 \rangle$

---

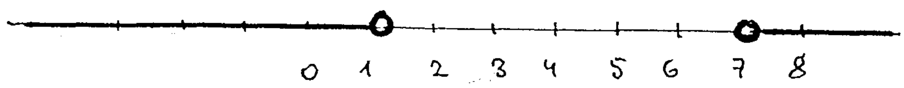
e) $|x-4|>3$ Stručně: $x-4>3 \quad \vee \quad -x+4>3$

$\boxed{x>7}$

$-x>-1 \quad |\cdot(-1)$

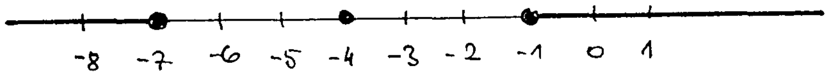
$\boxed{x<1}$

Výsledek: $\boxed{x \in (-\infty;1) \cup (7;+\infty)}$



f) $|x+4| \geqq 3$ upravíme:

$|x-(-4)| \geqq 3$, což znamená, že vzdálenost neznámého čísla x a čísla -4 je větší nebo rovna 3.



1. způsob, který je vyznačen na číselné ose, využívá grafického znázornění vzdálenosti od čísla -4.

Řešením je tedy sjednocení intervalů $(-\infty;-7\rangle \cup \langle -1;+\infty)$

2. způsob pomocí výpočtu:

$(x+4 \geqq 3) \vee (-x-4 \geqq 3)$

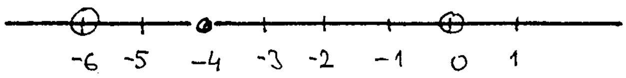
$\boxed{x \geqq -1} \quad \vee \quad -x \geqq 7 \quad |\cdot(-1)$

$\boxed{x \leqq -7} \qquad x \in (-\infty;-7\rangle \cup \langle -1+\infty)$

3. způsob: prostřednictvím nulových bodů (obdobně jako na str. 11): $|x+4| \geqq 3$

$x+4=0$

$x=-4$



	$(-\infty,-4\rangle$	$\langle -4,+\infty)$
$\lvert x+4 \rvert$	$-x-4$	$x+4$

Dosadit např. $x=-6$: $|-6+4|=|-2|$ mění opačný výraz $-x-4$

Dosadit $x=0$ $|0+4|=|4|$ nemění stejný výraz

1. interval: $|x+4| \geqq 3$

$-x-4 \geqq 3$

$\boxed{x \leqq -7}$

2. interval: $|x+4| \geqq 3$

$x+4 \geqq 3$

$\boxed{x \geqq -1}$

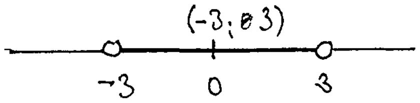
$x \in (-\infty;-7\rangle \cup \langle -1,+\infty)$

Poznámka: Postup přes nulové body není vhodný pro jednoduché úlohy, ale je nezastupitelný při řešení náročnějších úloh, jak uvidíme pak na str. 21 a další.

následující příklady ze sbírky pro OA

Příklad 19:

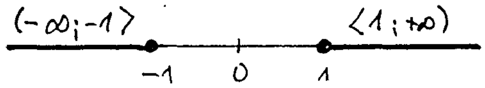
a) 6a/1330A: $|x|<3$ lze chápat jako $|x-0|<3$, čili vzdálenost neznámého čísla x od nuly je menší než 3.



$\boxed{x \in (-3;3)}$

Poznámka: Je-li použit znak <, jde o průnik.

b) 6b/1330A: $|x|\geqq 1$ lze chápat jako $|x-0|\geqq 1$, čili vzdálenost neznámého čísla x od nuly je větší nebo rovna 1. (Je-li použit znak >, jde o sjednocení.)



$\boxed{x \in (-\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty)}$

c) 6c/1330A: $|x|\leqq -1$ $\quad x\in\emptyset$ abs. hodnota není záporné číslo.

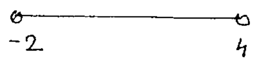
d) 6d/1330A: $|x|>-2$ každá abs. hodnota je větší než -2, nerovnice platí pro $\forall x\in R$.

e) 7a/1330A: $|x-1|<3$

$x-1<3$ $\qquad$ $-x+1<3$

$\boxed{x<4}$ $\qquad$ $-x<2 \quad /\cdot(-1)$

$\boxed{x>-2}$



$\boxed{x \in (-2;4)}$

f) 7b/1330A: $|x+1|>3$ $\qquad (x+1>3) \vee (-x-1>3)$

$x>2 \quad \vee \quad -x>4 \quad /\cdot(-1)$

$x<-4$

Protože jde o znak >3, tak jde o sjednocení intervalů.

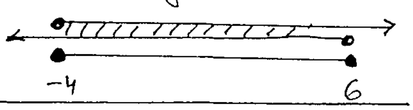
$\boxed{x \in (-\infty;-4) \cup (2;+\infty)}$

g) $|x-1|\leqq 5$ (7c/1330A) $\qquad x-1\leqq 5$ $\qquad -x+1\leqq 5$

$\boxed{x\leqq 6}$ $\qquad -x\leqq 4 \quad /\cdot(-1)$

$\boxed{x\geqq -4}$

Protože je použit znak <, tak jde o průnik intervalů



$\boxed{x \in \langle -4;6\rangle}$

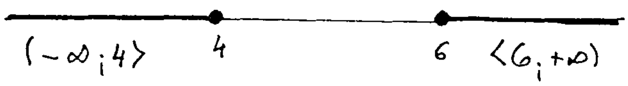
h) 4d 1330A : $|x-1| \geqq 5$ (podle str. 18)

$(x-1 \geqq 5) \vee (-x+1 \geqq 5)$

$(x \geqq 6) \vee -x \geqq 4 \quad | \cdot (-1)$

$(x \geqq 6) \vee (x \leqq 4)$

$\boxed{x \in (-\infty; 4\rangle \cup \langle 6; +\infty)}$



---

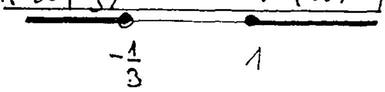
i) 8a 1330A : $|3x-1| \geqq 2$ ... $(3x-1 \geqq 2) \vee (-3x+1 \geqq 2)$

$(3x \geqq 3) \vee (-3x \geqq 1) \quad | : (-3)$

$(x \geqq 1) \vee (x \leqq -\frac{1}{3})$

Výsledek:

$\boxed{(-\infty; \tfrac{1}{3}\rangle \quad \cup \quad \langle 1, \infty)}$



---

j) 9a 1330A : $0 < |x-2| < 3$ Tuto „dvoustrannou" nerovnici vyjádříme ve tvaru soustavy dvou nerovnic. Každou nerovnici vyřešíme samostatně. Výsledkem řešení soustavy bude průnik řešení obou nerovnic (obdobně jako na str. 13, 14)

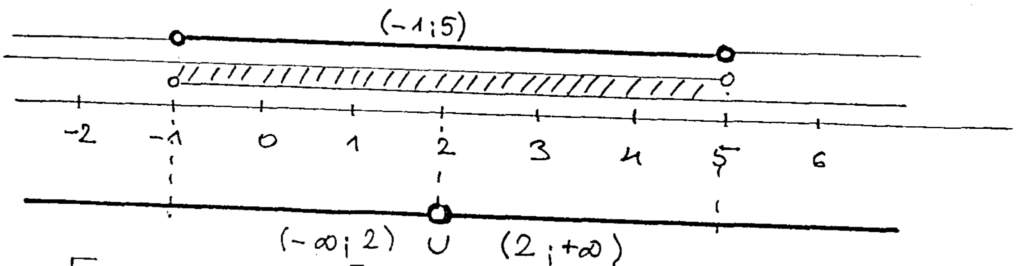
Podle poznámky na str. 19 platí:

Je-li použit znak > je výsledkem sjednocení množin } intervalů
" " " < " " průnik –"–

Řešení je možné provést pomocí jednoho zápisu:

$$\left[(x-2 > 0) \vee (-x+2 > 0)\right] \wedge \left[(x-2 < 3) \wedge (-x+2 < 3)\right]$$

$$\underbrace{(x > 2 \quad \vee \quad x < 2)}_{\text{pod číselnou osou}} \quad \wedge \quad \underbrace{(x < 5 \quad \wedge \quad x > -1)}_{\text{nad čís. osou}}$$



$\left[(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)\right] \cap (-1; 5) = (-1; 2) \cup (2; 5)$

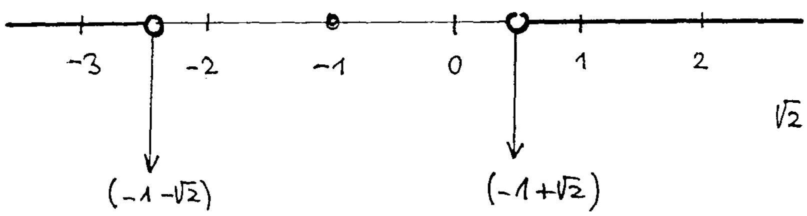
$\boxed{x \in (-1; 2) \cup (2; 5)}$

20 Konec příkladů pro OA.

Příklad 20: Řešte:

a) $|x+1| > \sqrt{2}$ Řeš podle př. f / (18)

$|x-(-1)| > \sqrt{2}$ Vzdálenost neznámého čísla x od čísla (-1) je větší než $\sqrt{2}$.



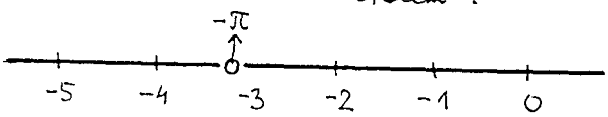
$\sqrt{2} \doteq 1{,}4$

$\boxed{x \in (-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}; +\infty)}$

---

b) $|x+\pi| > 0$

$|x-(-\pi)| > 0$ Vzdálenost neznámého čísla x od čísla $(-\pi)$ je nyní dána kladným číslem.



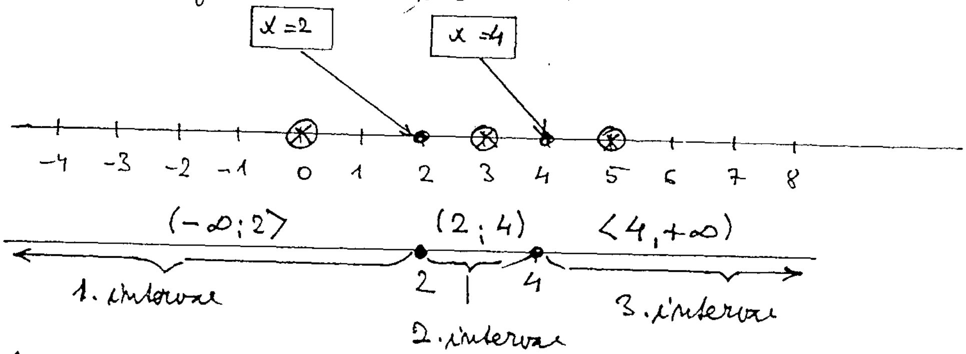
$\boxed{x \in R - \{-\pi\}}$

Náročnější příklady (není (asi) učivo OA)

Příklad 21: Řešte $|x-2| + |2x-8| \leqq 5$

Řešení: Množinu všech $x \in R$ rozdělíme na disjunktní podmnožiny. Určíme nulové body. Podle poznámky v učebnici Rovnice nerovnice na str. 72 nezáleží na tom, ke kterému z intervalů nulové body přiřadíme.

Nulové body: $x-2=0$ $2x-8=0$



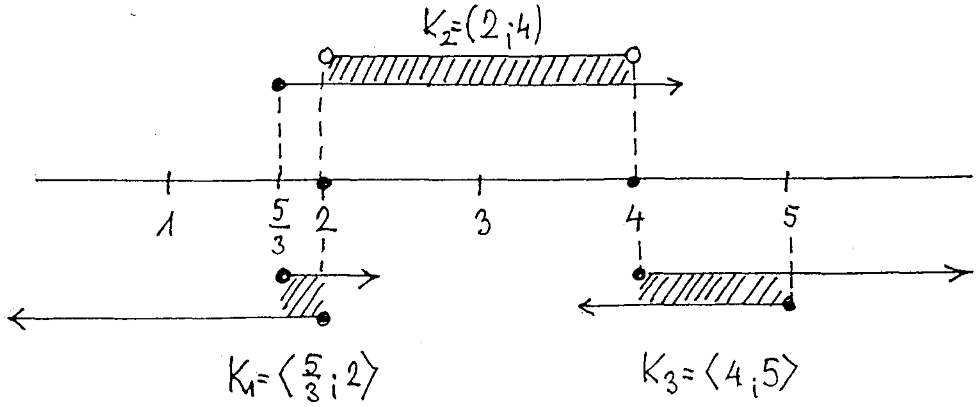
Dosazením vybraných čísel (21) z jednotlivých intervalů do

Výrazy $x-2$, $2x-8$ zjistíme, zda jsou v tom či onom intervalu kladné nebo záporné. Podle zjištěných výsledků pak doplníme následující tabulky.

	1. interval	2. interval	3. interval
	$(-\infty; 2\rangle$	$(2;4)$	$\langle 4;+\infty)$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert 2x-8\rvert$	$-2x+8$	$-2x+8$	$2x-8$

1. interval:	2. interval	3. interval
$\lvert x-2\rvert+\lvert 2x-8\rvert \leqq 5$	$\lvert x-2\rvert+\lvert 2x-8\rvert \leqq 5$	$\lvert x-2\rvert+\lvert 2x-8\rvert \leqq 5$
$-x+2+(-2x+8) \leqq 5$	$-x+2+(-2x+8) \leqq 5$	$x-2+(2x-8) \leqq 5$
$-x+2-2x+8 \leqq 5$	$-x+2-2x+8 \leqq 5$	$x-2+2x-8 \leqq 5$
$-3x \leqq -5 \quad \vert :(-3)$	$-3x \leqq -5$	$3x \leqq 15 \quad \vert :3$
$x \geqq \frac{5}{3} \; \left(1\frac{2}{3}\right)$	$x \geqq \frac{5}{3} \; \left(1\frac{2}{3}\right)$	$x \leqq 5$

Označíme-li množinu řešení v 1. intervalu K_1, ve druhém K_2, ve třetím K_3 a množinu všech řešení K, platí (viz obr.)



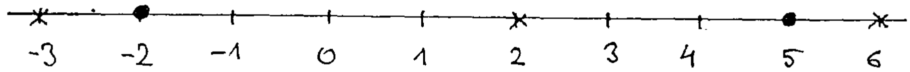
$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \langle \tfrac{5}{3};2\rangle \cup (2;4) \cup \langle 4;5\rangle = \boxed{\langle \tfrac{5}{3};5\rangle}$$

Ověření: např. pro $x=3$: $L=|3-2|+|2\cdot 3-8|=|1|+|-2|=1+2=3$

$P=5$; $3\leqq 5$, tedy $L\leqq P$.

Příklad 22: Řešte nerovnici $|x+2| - |x-5| \geqq -3$

Nulové body: $x=-2$, $x=5$



Pomocí zakřížkovaných bodů posoudíme, zda výrazy v $|x+2|$, $|x-5|$ jsou záporné, nebo kladné.

	1. interval	2. interval	3. interval
	$(-\infty; -2)$	$\langle -2; 5)$	$\langle 5; +\infty)$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$

1. interval

$|x+2| - |x-5| \geqq -3$

$-x-2-(-x+5) \geqq -3$

$-x-2+x-5 \geqq -3$

$0x \geqq 4$

$x \in \emptyset$

$K_1 = \emptyset$

2. interval

$|x+2| - |x-5| \geqq -3$

$x+2-(-x+5) \geqq -3$

$x+2+x-5 \geqq -3$

$2x \geqq 2$

$x \geqq 0$

3. interval

$|x+2| - |x-5| \geqq -3$

$x+2-(x-5) \geqq -3$

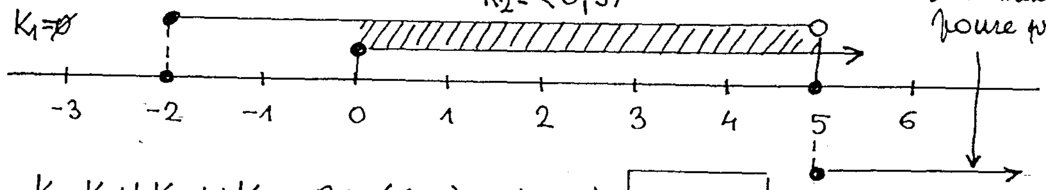
$x+2-x+5 \geqq -3$

$0x \geqq -10$

Platí pro každé $x \in R$, v daném intervalu pouze pro

$K_1 = \emptyset$

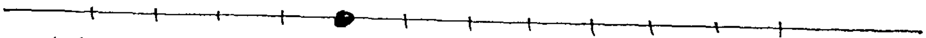
$K_2 = \langle 0; 5)$



$K_3 = \langle 5; \infty)$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \emptyset \cup \langle 0;5) \cup \langle 5;\infty) = \boxed{\langle 0; \infty)}$

Příklad 23: Příklad f) ze str. 18 vyřešte pomocí nulového bodu: $|x+4| \geqq 3$

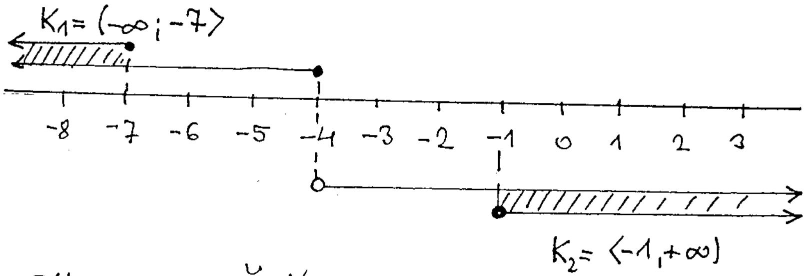


	$(-\infty; -4\rangle$	-4	$(-4; +\infty)$
$\lvert x+4\rvert$	$-x-4$		$x+4$
	1. interval		2. interval

1. interval	2. interval
$\lvert x+4\rvert \geqq 3$	$\lvert x+4\rvert \geqq 3$
$-x-4 \geqq 3$	$x+4 \geqq 3$
$-x \geqq 7$	
$\boxed{x \leqq -7}$	$\boxed{x \geqq -1}$

$K = K_1 \cup K_2$

$\boxed{K = (-\infty; -7\rangle \cup \langle -1, +\infty)}$



<u>Příklad 24</u>: Řešte soustavu nerovnic $2 < \lvert 3x+1\rvert \leqq 7$

<u>Řešení</u>: Soustavu přepíšeme: $\lvert 3x+1\rvert \leqq 7$

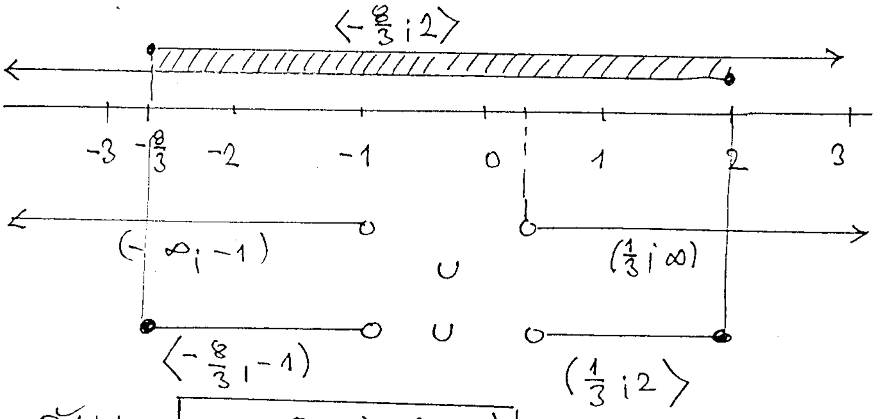
$\lvert 3x+1\rvert > 2$

Podle sch. 19 (pro $<$ $\cap$, pro $>$ $\cup$). Ovšem můžeme řešit i tak, že využijeme poznatky z př. 23. Řešení lze provést zkráceně:

$$\left[(3x+1 \leqq 7) \wedge (-3x-1 \leqq 7)\right] \wedge \left[(3x+1>2) \vee (-3x-1>2)\right]$$

$$(3x \leqq 6) \wedge (-3x \leqq 8) \quad \wedge \quad 3x > 1 \quad \vee \quad -3x > 3$$

$$\left[(x \leqq 2) \wedge \left(x \geqq -\tfrac{8}{3}\right)\right] \quad \wedge \quad \left[\left(x > \tfrac{1}{3}\right) \vee (x < -1)\right]$$



Řešení: $\boxed{x \in \langle -\frac{8}{3}, -1) \cup (\frac{1}{3}; 2\rangle}$