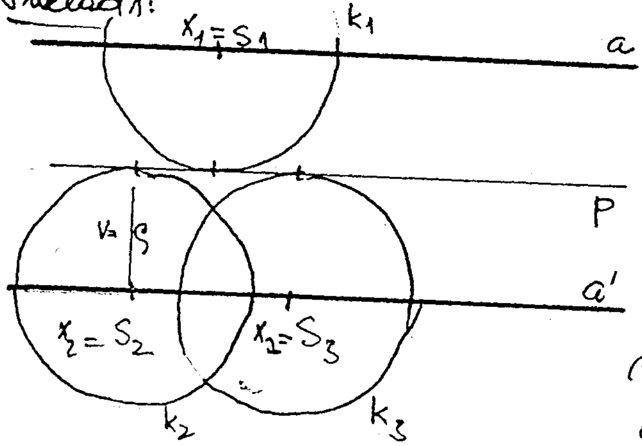
6. b) UŽITÍ MNOŽIN BODŮ DANÉ VLASTNOSTI
KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

Několik příkladů množin bodů dané vlastnosti:

Příklad 1:

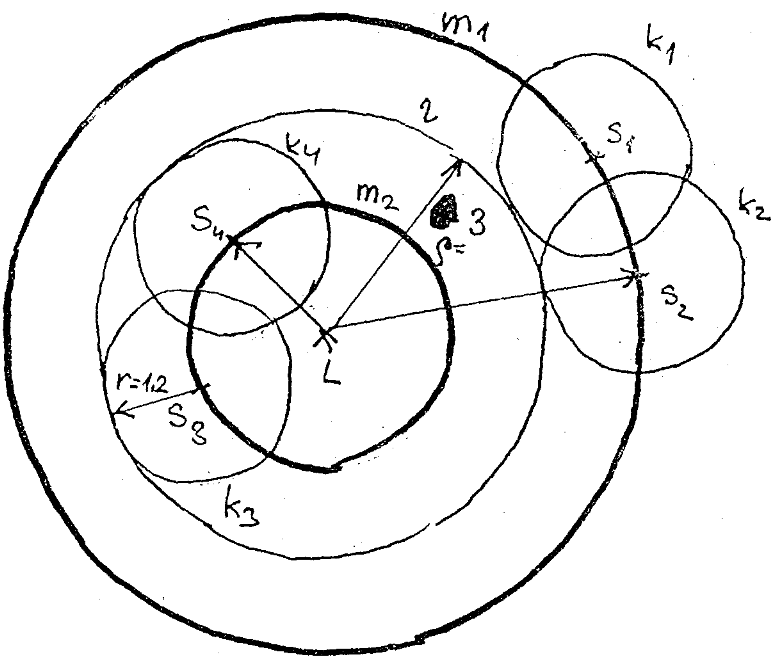


Množina všech bodů, které mají od přímky p vzdálenost v (v>0), je dvojice přímek a, a' rovnoběžných s přímkou p, ležících v opačných polorovinách s hraniční přímkou p ve vzdálenosti $\underline{v}$ od ní.

Symbolicky: $\{X \in \rho;\ |Xp| = v\} = a \cup a'$.

Rovnoběžky a, a' jsou zároveň množinou středů všech kružnic s daným poloměrem ρ ($\rho = v$), které se dotýkají dané přímky p.

Příklad 2: Co je množinou ~~všech~~ středů všech kružnic $k(S; r = 1{,}2\ \text{cm})$, které se dotýkají kružnice $l(L; \rho = 3\ \text{cm})$ a) vně, b) zevnitř?



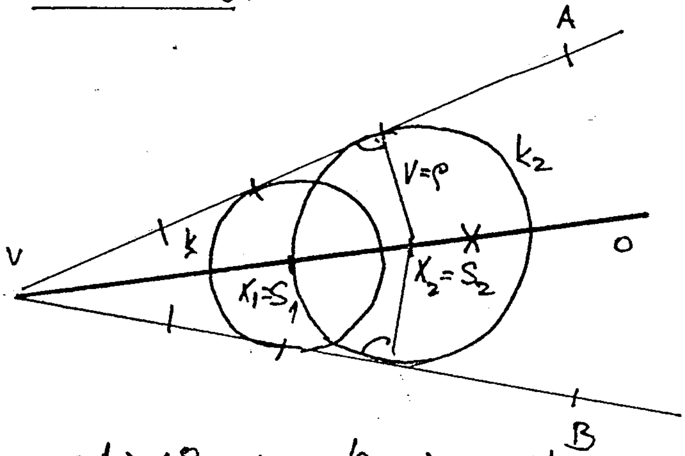
Řešení:

a) $m_1(L; \rho + r = 4{,}2\ \text{cm})$

b) $m_2(L; \rho - r = 1{,}8\ \text{cm})$

Kružnice m_1, m_2, l jsou soustředné.

Příklad 3:

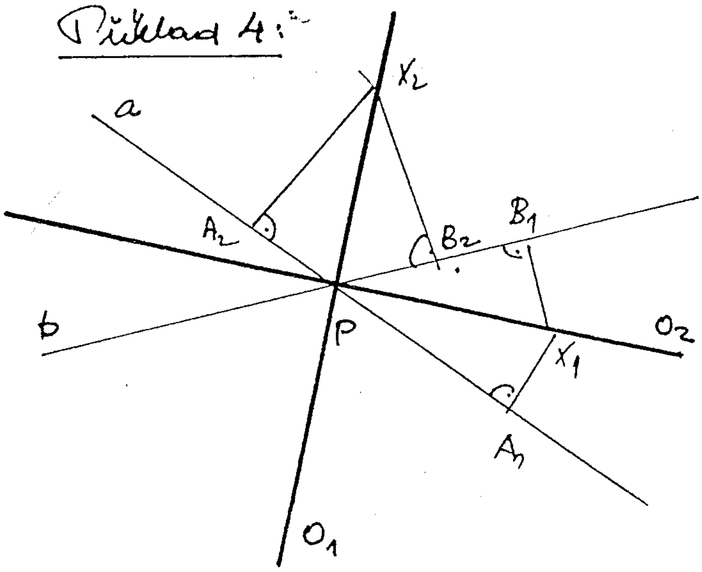


Množina všech bodů konvexního úhlu AVB, které mají stejnou vzdálenost od přímek, v nichž leží jeho ramena, je osa o tohoto úhlu.

$\{X \in \sphericalangle AVB;\ |X\overleftrightarrow{VA}| = |X\overleftrightarrow{VB}|\} = o$

Tato osa je zároveň množinou středů všech kružnic, které se dotýkají obou ramen tohoto úhlu.

Příklad 4:



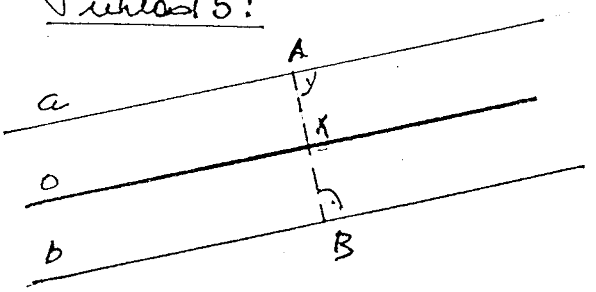
Poznámka: Osa úhlu se někdy definuje jako polopřímka, jindy jako přímka. Na tom závisí pak následující množina bodů.

Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek a, b, jsou osy o_1, o_2 úhlů sevřených různoběžkami a, b.

$\{X \in \rho : |Xa| = |Xb|\} = o_1 \cup o_2$

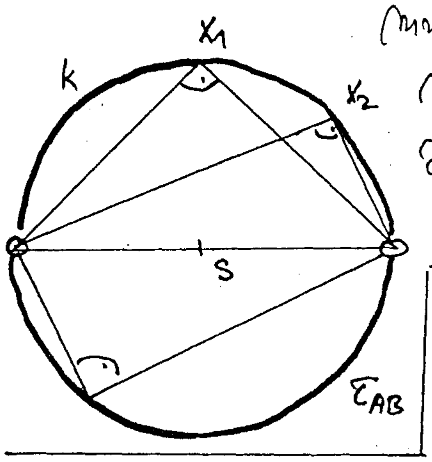
o_1, o_2 jsou zároveň množinou středů všech kružnic, které se dotýkají obou různoběžek.

Příklad 5:

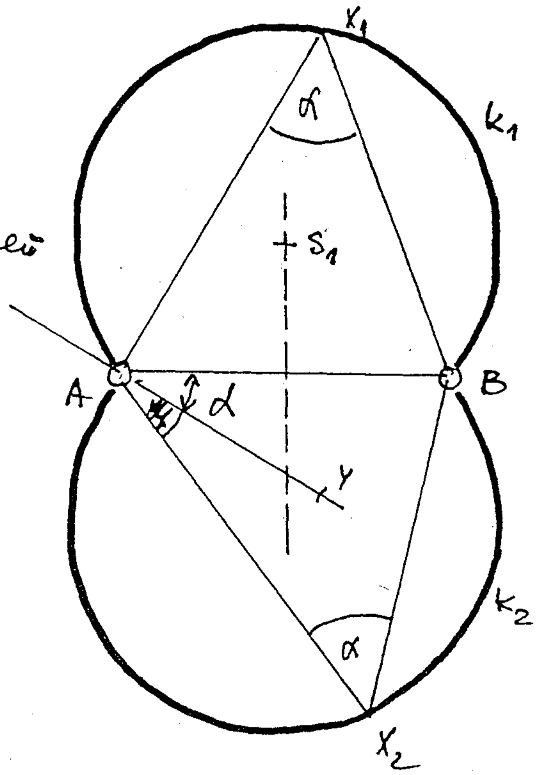


Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou rovnoběžek a, b ($a \neq b$), je osa rovinného pásu (a, b).

$\{X \in \rho;\ |Xa| = |Xb|\} = o$

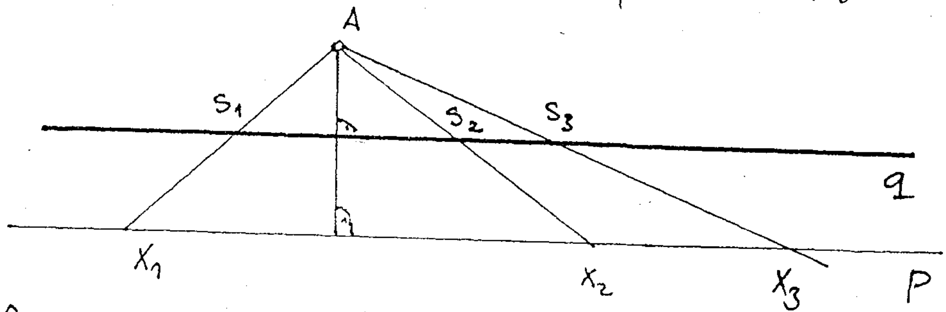


Množina vrcholů všech pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma pevnými body A, B je kružnice $\underline{k}$ s průměrem AB kromě bodů A, B (Thaletova kružnice).



Příklad 6: Množina vrcholů všech úhlů p velikosti α jsou dva shodné otevřené kružnicové oblouky $k_1 = \widehat{AX_1B}$ a $k_2 = \widehat{AX_2B}$ s krajními body A, B. ($\sphericalangle BAY$ je úsekový úhel).

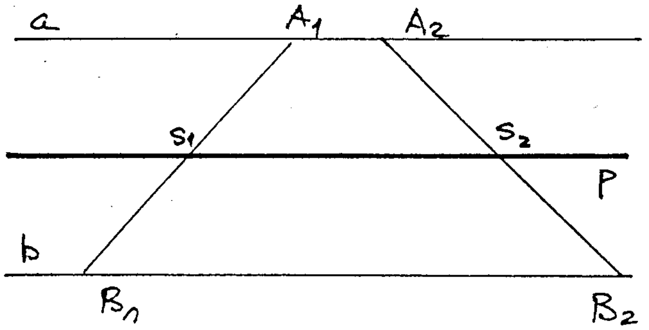
Příklad 7 (2.1/95-uč.): Je dána přímka p a bod A ($A \notin p$). Určete množinu středů všech úseček AX, jestliže $X \in p$.



Množinou je přímka q: $q \parallel p$ $|Aq| = |qp|$. (Množ. lze zdůvodnit pomocí středních příček S_1S_2, S_1S_3, S_2S_3 trojúhelníků X_1X_2A, X_1X_3A, X_2X_3A.

Příklad 8 (2.2/9.5) uč.

Určete množinu středů všech úseček, které mají krajní body na dvou přímkách rovnoběžných a, b.

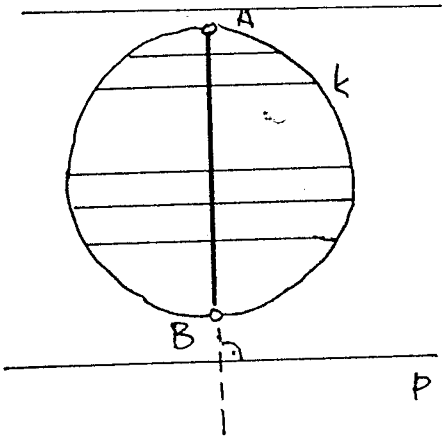


Výsledek:

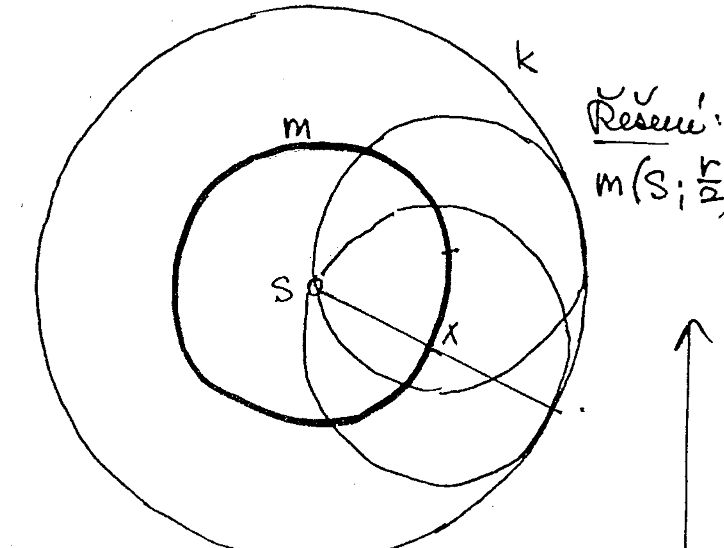
p: $p \parallel a$, $p \parallel b$, $|ap| = |bp|$

(S_1S_2 posouvá ke souměrnosti, jde o střední příčku lichoběžníku $B_1B_2A_2A_1$)

Příklad 9 (2.3/95-uč.)



Množinou je průměr AB kružnice k kolmý k přímce p bez krajních bodů A, B.

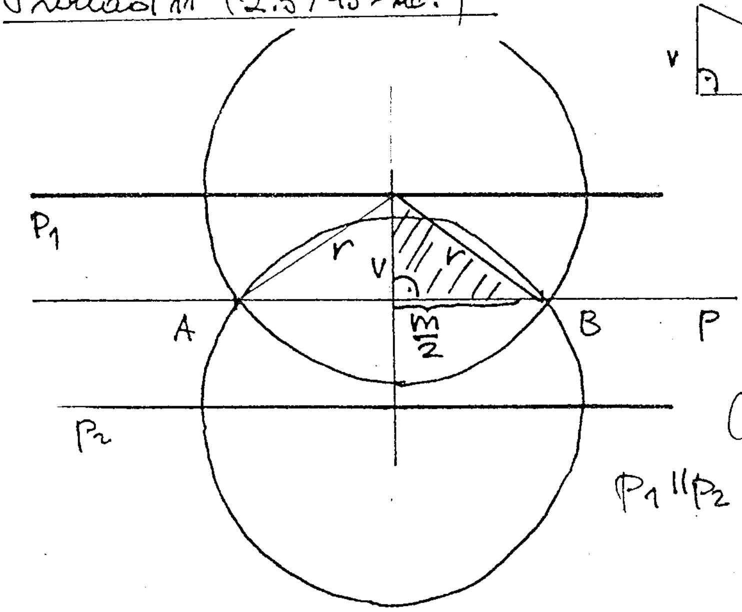


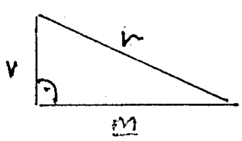
Řešení:

$m(S; \frac{r}{2})$

Příklad 10 (2.4/95-uč.) Určete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k a procházejí bodem S, je-li $k(S; r)$.

Příklad 11 (2.5/95-uč.)





$$v = \sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}}$$

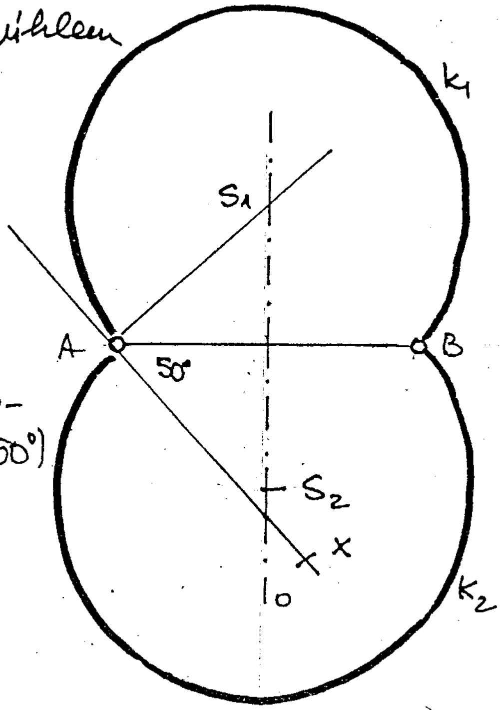
$$v = \sqrt{\frac{4r^2 - m^2}{4}}$$

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - m^2}$$

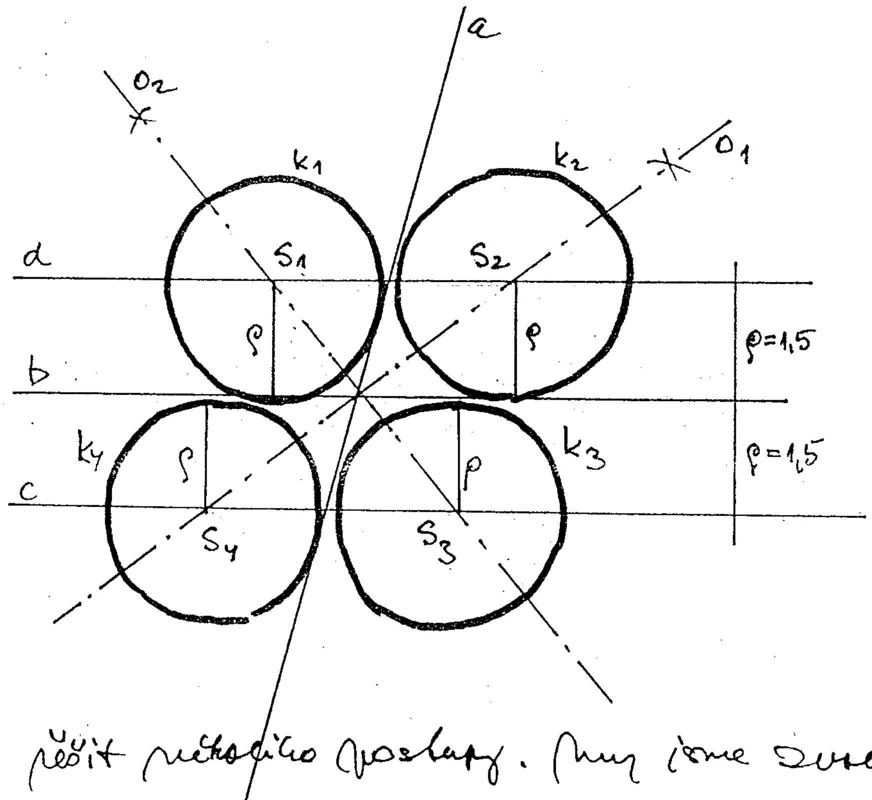
Výsledek: p_1, p_2, kde $p_1 \parallel p_2$, $|pp_1| = |pp_2| = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - m^2}$

Příklad 12: Určete množinu všech bodů, z nichž vidíme úsečku AB ($|AB| = 4\,cm$) pod úhlem $\alpha = 50°$

Množinou jsou dva kruhové oblouky k_1 se středem S_1 a k_2 se středem S_2. Středy S_1, S_2 sestrojíme pomocí úsekového úhlu BAX ($|\sphericalangle BAX| = 50°$) a osy $\underline{o}$ úsečky AB.

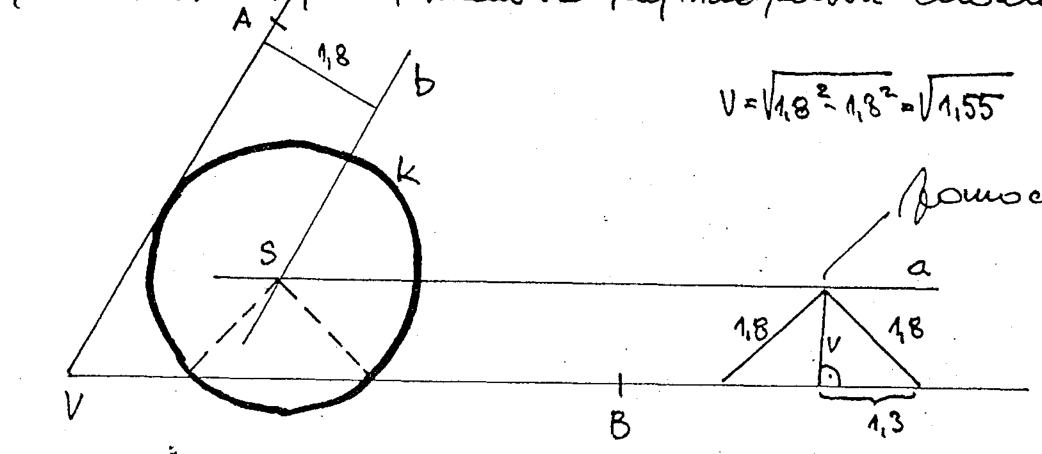


Příklad 13: Sestrojte všechny kružnice $\underline{k}$ s poloměrem $\rho = 1{,}5\,cm$ dotýkající se přímek a, b, které svírají úhel 75°.



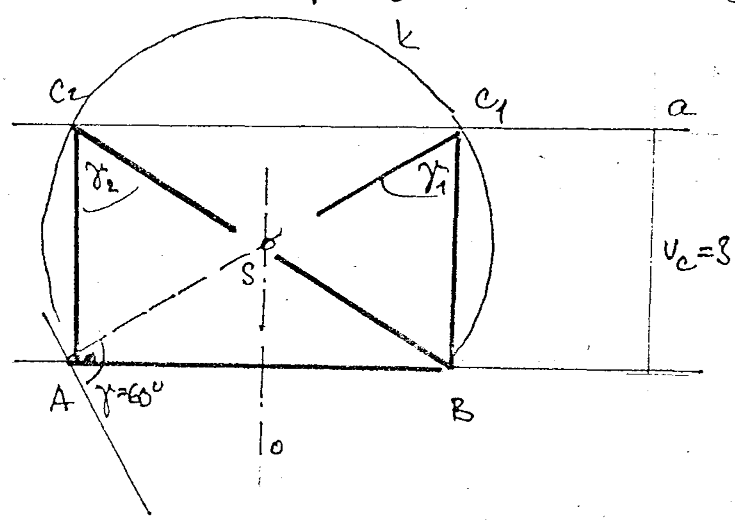
Úlohu lze řešit několika postupy. My jsme zvolili rovnoběžky $\underline{c}, \underline{d}$ s přímkou $\underline{b}$ a osy o_1, o_2 úhlů, které svírají přímky $\underline{a}, \underline{b}$.

Příklad 14: Narýsujte úhel AVB ($|\sphericalangle AVB| = 60°$) a pak sestrojte kružnici k s poloměrem $r = 1,8$ cm, která se dotýká ramene VA a na rameni VB vytíná tětivu délky 2,6 cm



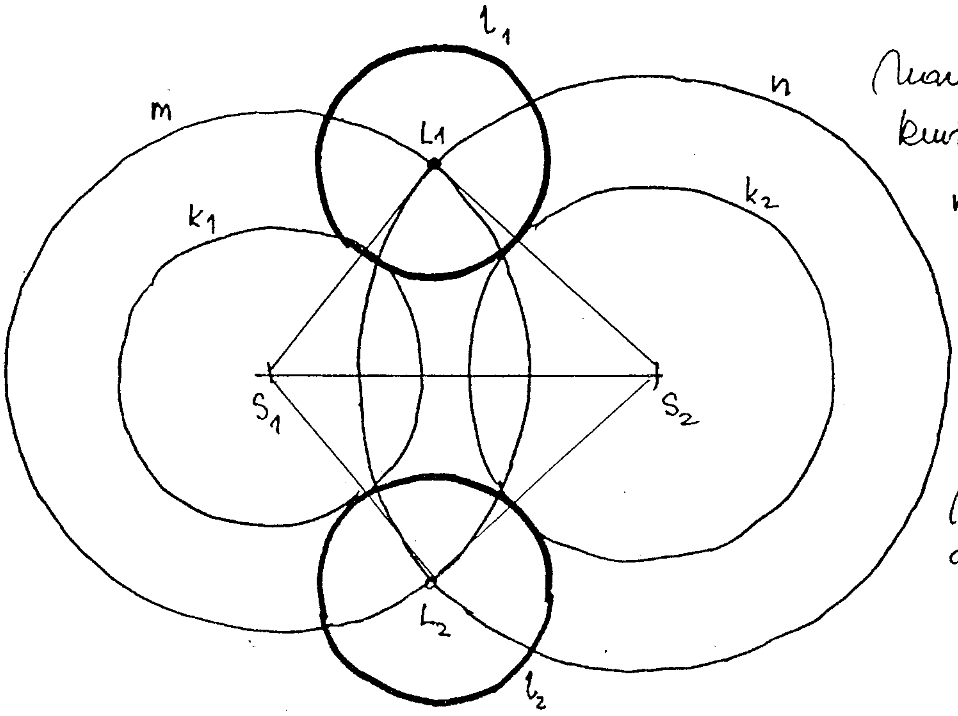
Narýsujeme úhel AVB a přímku $a \parallel \overrightarrow{VB}$ ve vzdálenosti $v = \sqrt{1,55}$ a přímku $b \parallel \overrightarrow{VA}$ ve vzdálenosti $r = 1,8$ cm. Platí $S \in a \cap b$.

Příklad 15: Je dána úsečka AB ($|AB| = 5$ cm). V jedné polorovině s hraniční přímkou AB sestrojte všechny trojúhelníky ABC, v nichž $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $v_c = 3$ cm. $\left(\frac{\pi}{3} = 60°\right)$



Úloha má 2 řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$.
Střed S kružnicového oblouku sestrojíme pomocí úsekového úhlu a osy strany AB.

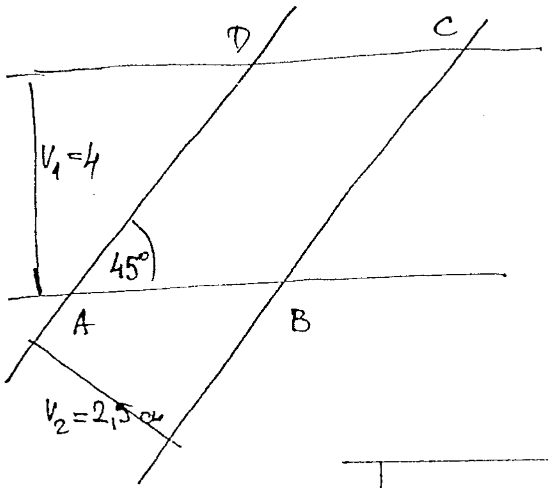
Příklad 16: Jsou dány kružnice $k_1(S_1; 2\,\text{cm})$, $k_2(S_2; 2,5\,\text{cm})$, $|S_1S_2| = 5$ cm. Sestrojte všechny kružnice s poloměrem $\varrho = 1,5$ cm, které se dotýkají kružnic k_1, k_2



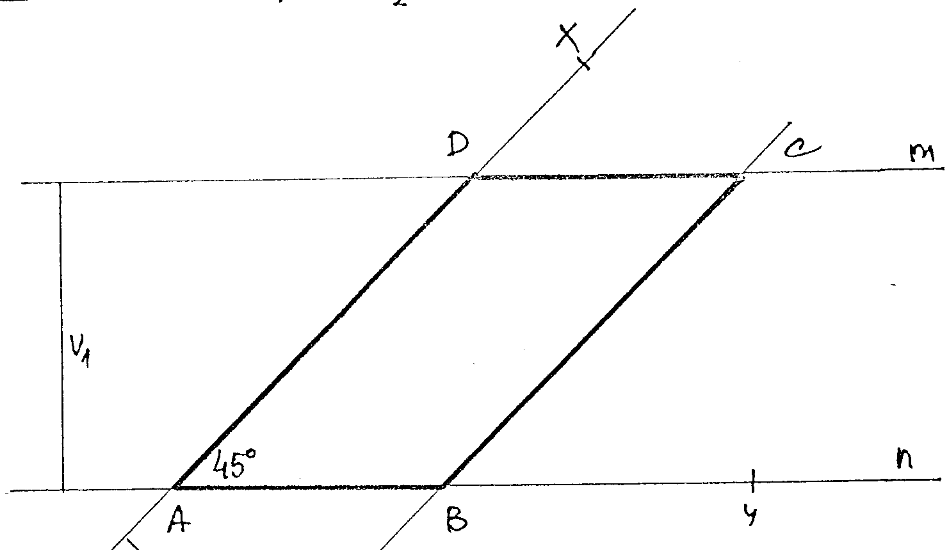
Narýsujeme k_1 a k_2, pak kružnici $m(S_1; 3{,}5\,cm)$, $n(S_2, 4\,cm)$. Platí: $m \cap n = \{L_1, L_2\}$, kde L_1 je střed kružnice l_1, L_2 " " l_2.

Úloha má 2 řešení, a to kružnice l_1, l_2.

Příklad 17: Sestrojte rovnoběžník ABCD s vnitřním úhlem DAB velikosti 45°, je-li vzdálenost protějších stran AB, CD rovna 4 cm a stran AD, BC rovna 2,5 cm.



Narýsuji m, n ($m \parallel n$), $|mn| = v_1 = 4$ cm. Na přímce n zvolím bod A, sestrojím úhel XAY ($|\sphericalangle XAY| = 45°$). Polopřímku AX označím p, sestrojím q, $p \parallel q$, $|pq| = v_2 = 2{,}5$ cm atd.



Úloha má 1 řešení.

Další úlohy jsou v před. otázkách 3a) a 12b.