# 17a) UŽITÍ VÝROKOVÉHO POČTU

Výrok je sdělení vyjádřené oznamovací větou, o němž má smysl tvrdit, že je pravdivé (že platí), anebo nepravdivé (že neplatí). Toto sdělení může být vyjádřeno i pomocí symbolů. V matematice jsou to znaky, které se používají k označení matem. pojmů a vztahů. Každému výroku přiřazujeme jeho pravdivostní hodnotu: 1 = pravda, 0 = nepravda.

Příklady pravdivých výroků

A: $3 < 5$ | B: Číslo 4 je přirozené číslo ($4 \in N$).

C: $3+9=12$ | D: 24 je sudé číslo.

E: Karel IV. byl český král. | F: Praha je hlavní město ČR.

Příklady nepravdivých výroků:

A: $8 < -3$ | B: Číslo 8 je liché.

C: $\frac{1}{3} \in N$ | D: $10-4=7$

E: Alois Jirásek byl hudební skladatel. | F: Londýn je hlavní město Polska.

Kvantifikátory nazýváme slova nebo sousloví či jazykové vyjádření včetně symbolů, které vyjadřují údaje o počtu objektů, věcí, osob, čísel, prvků množiny aj.

Patří mezi ně:

a) číslovky

b) slova či sousloví:

- nikdo (nic, žádný) ...... znamená počet 0
- aspoň jeden (některý, někdo) .............. znamená 1 nebo více než 1
- nejvýše jeden ........... znamená 0, 1
- aspoň dva ............. znamená 2, nebo i více než 2
- $\forall x \in U : V(x)$ ... Pro každé (či libovolné) x z množiny U platí výrok V(x) ... obecný kvantifikátor

• $\exists x \in U: V(x)$ ... Existuje aspoň jedno $\underline{x}$ z množiny $U$, pro které platí výrok $V(x)$ ... existenční kvantifikátor.

## Příklady kvantifikovaných výroků

| | | Pravdivostní hodnota |
|---|---|---|
| A: | $\forall n \in N;\ n > 0$ | 1 |
| B: | $\exists n \in N;\ n > 0$ (B vyplývá z A) | 1 |
| C: | $\exists x \in R;\ x > -2$ | 1 |
| D: | $\forall x \in R;\ x > -2$ | 0 |

## Negace (¬) jednoduchého výroku

je výrok vytvořený z daného výroku, který popírá to, co tento výrok tvrdí. Negaci vytvoříme

a) záměnou slov je a není,

b) použitím předpony ne (nebo jejím vypuštěním),

c) použitím kvantifikátorů aj. (např. není pravda, že...)

| A | ¬A |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

| Výrok (A) | Jeho negace (¬A) |
|---|---|
| Číslo 5 je nezáporné. | Číslo 5 je záporné. |
| $\sqrt{5} > 2$ | $\sqrt{5} \leqq 2$ |
| Hodnota číselného výrazu (6 - 9) není kladná. | Hodnota číselného výrazu je kladná. |
| $\sqrt{49} \neq \pm 7$ | $\sqrt{49} = \pm 7$ |
| Praha má méně než 1,5 mil. obyvatel. | Praha má aspoň 1,5 mil. obyvatel. |
| Čtverec má aspoň 4 úhlopříčky. | Čtverec má nejvýše 3 úhlopříčky. |
| V 7.C novolyaňského gymnázia je právě 28 žáků. | V 7.C n.-g. je nejvýše 27 žáků nebo aspoň 29 žáků. |

## Negace:

| Výrok → Jeho negace<br>Jeho negace ← Výrok | |
|---|---|
| Každý je... | Aspoň jeden není... |
| Aspoň jeden je... | Žádný... není... |
| aspoň $\underline{n}$ ... je...<br>(při $n \in N \wedge n > 1$) | nejvýše $(n-1)$... je.. |
| nejvýše $\underline{n}$ je<br>(při $n \in N \wedge n \geq 1$) | aspoň $(n+1)$.... je... |
| Právě $\underline{n}$ ...je.. | nejvýše $(n-1)$..je... nebo<br>aspoň $(n+1)$...je |
| $\forall a \in R: (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $\exists a \in R: (a+b)^2 \neq a^2 + 2ab + b^2$ |

## Složené výroky (už jen stručně)

Z jednodušších výroků je možné pomocí logických spojek vytvářet složené výroky.

| Výchozí výroky | Logická spojka | Symbol spojky | Symbolický zápis složeného výroku | Název složeného výroku |
|---|---|---|---|---|
| A, B | a | $\wedge$ | $A \wedge B$ | konjunkce |
| A, B | nebo | $\vee$ | $A \vee B$ | disjunkce |
| A, B | jestliže, pak | $\Longrightarrow$ | $A \Longrightarrow B$ | implikace |
| A, B | právě * když | $\Longleftrightarrow$ | $A \Longleftrightarrow B$ | ekvivalence |

* právě tehdy když – se už nepoužívá

| NEGACE JEDNODUCHÉHO VÝROKU | | A | ¬A |
|---|---|---|---|
| Výrok ⟶ Negace výroku | | 1 | 0 |
| Negace výroku ⟵ Výrok | | 0 | 1 |
| Každý ... je --- | Aspoň jeden ... není --- | | |
| Aspoň jeden ... je --- | Žádný ... není --- | | |
| Aspoň $n$ ... je --- (při $n > 1$) | Nejvýše $(n-1)$ ... je --- | | |
| Nejvýše $n$ ... je --- (při $n \geq 1$) | Aspoň $(n+1)$ ... je --- | | |

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

NEGACE SLOŽENÝCH VÝROKŮ

$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg A \wedge B$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| A | B |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 0 |

TABULKA PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT SLOŽENÝCH VÝROKŮ

| A | B | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

<u>Tautologie</u> je složený výrok, který je vždy pravdivý, a to bez ohledu na pravdivost či nepravdivost výchozích výroků.

UKÁZKA NEGACE VÝROKŮ POMOCÍ KVANTIFIKÁTORŮ

obecný kv. $\forall$ (obrácené A z anglického slova all)
existenční kv. $\exists$ (obrácené E z anglického slova exist)

| | | |
|---|---|---|
| $\forall x \in M;\ V(x)$ | jeho negace | $\exists x \in M;\ \neg V(x)$ |
| $\exists x \in M;\ V(x)$ | " | $\forall x \in M;\ \neg V(x)$ |
| $\forall x \in R;\ x^2 \geq 0$ | " | $\exists x \in R;\ x^2 < 0$ |

| | |
|---|---|
| OBRÁCENÁ IMPLIKACE | $(A \Rightarrow B)$ obrácená $(B \Rightarrow A)$ |
| OBMĚNA IMPLIKACE | $(A \Rightarrow B)$ obměna $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ |

Příklad 1: Dokažte, že pro libovolné výroky A, B platí

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ | $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

TAUTOLOGIE

Říkáme, že výroky $\neg(A \wedge B)$ a $(\neg A \vee \neg B)$ jsou logicky ekvivalentní.

Příklad 2: Utvořte negaci výroků U:

a) U: Číslo 42 je dělitelné dvěma a třemi.

Tento výrok je složen ze dvou jednodušších výroků:

A: Číslo 42 je dělitelné dvěma.

B: Číslo 42 je dělitelné třemi.

Výrok U je konjunkce $A \wedge B$

$\neg U$ je negace $\neg(A \wedge B) \ldots = (\neg A \vee \neg B)$

$\neg A$: Číslo 42 není dělitelné dvěma.

$\neg B$: Číslo 42 není dělitelné třemi.

$(\neg A \vee \neg B)$: Číslo 42 není dělitelné dvěma, NEBO není dělitelné třemi.

---

b) U: Čtverec ani obdélník nejsou čtyřúhelníky.

"ani" je souřadicí spojka ve smyslu a, jde o konjunkci výroků:

A: Čtverec není čtyřúhelník

B: Obdélník není čtyřúhelník

$\neg U$ je negace $\neg(A \wedge B)$

$\neg A$: Čtverec je čtyřúhelník. $\neg B$: Obdélník je čtyřúhelník.

$\neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$: Čtverec je čtyřúhelník nebo obdélník je čtyřúhelník.

Stručně: Čtverec nebo obdélník jsou čtyřúhelníky.

---

**Příklad 3:** Dokažte, že pro libovolné výroky A,B platí

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

| A | B | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Příklad 4:** V. Pavel Novák maturoval z angličtiny nebo němčiny.

A: P.N. maturoval z angličtiny.

B: P.N. maturoval z němčiny.

$\neg(A \vee B)$: Není pravda, že P.N. maturoval z angličtiny nebo němčiny.

$\neg A \wedge \neg B$: Pavel Novák nematuroval z angličtiny a nematuroval z němčiny.

Stručně: Pavel Novák nematuroval z angličtiny ani z němčiny.

---

**Příklad 5:** Dokažte, že výrok $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(\neg B \wedge A)$ je tautologií.

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow \neg B$ | $\neg(A \Rightarrow \neg B)$ | $\neg B \wedge A$ | $\neg(\neg B \wedge A)$ | $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg B \wedge A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Úsudek** je myšlenkový postup, při kterém

1) uděláme předpoklad o podobě výroků a jejich pravdivostních hodnot,

2) vyslovujeme závěr na základě pravdivostních hodnot daných výroků.

Vždy ověřujeme, zda úsudek je či není správný.

Příklad 6: Kapitán Exner vyšetřuje případ vraždy. Vyšetřováním se okruh podezřelých zúžil na tři osoby A, B, C. Bylo zjištěno:

$V_1$: Jestliže byl v kritické době na místě činu podezřelý C, pak tam nebyl podezřelý A, ale byl tam podezřelý B.

$V_2$: Není pravda, že na místě činu nebyl A a přitom tam nebyl C.

$V_3$: V době, kdy byl na místě činu podezřelý A, nebyl tam C.

$V_4$: Když tam nebyl C, byl tam A.

Dále se bezpečně vědělo, že pachatel byl v kritické době na místě činu sám. Kdo byl pachatelem?

---

$V_1$: $C \Rightarrow \neg A \wedge B$

$V_2$: $\neg(\neg A \wedge \neg C)$ je totéž jako $(\neg A \vee \neg C)$

$$\left.\begin{array}{l} V_3: A \Rightarrow \neg C \\ V_4: \neg C \Rightarrow A \end{array}\right\} \text{z toho plyne, že } A \Leftrightarrow \neg C$$

| | A | B | C | ¬A | ¬B | ¬C | ¬A ∧ B | ① $C \Rightarrow \neg A \wedge B$ | ② $\neg A \vee \neg C$ | ③ $A \Leftrightarrow \neg C$ | ① ∧ ② | ① ∧ ② ∧ ③ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| * | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| # | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

* Tady byli 2 pachatelé. # Tady byl 1 pachatel.

Pachatelem byl podezřelý A.

---

Příklad 7: Petr a Pavel čekají před kinem na své spolužáky Adama, Břetislava a Cyrila. Petr tvrdí:

$V_1$: „Přijde-li Adam a Břetislav, přijde i Cyril."

Pavel říká:

$V_2$: „Když přijde Adam a nepřijde Cyril, nepřijde ani Břetislav."

Říkají obě totéž?

$V_1: (A \wedge B) \Rightarrow C$ $\qquad$ $V_2 = (A \wedge \neg C) \Rightarrow B$

| A | B | C | $A \wedge B$ | $(A \wedge B) \Rightarrow C$ | $\neg C$ | $A \wedge \neg C$ | $(A \wedge \neg C) \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Obě říkají totéž. $\quad \Leftrightarrow$

Obměněná implikace a obrácená implikace.

Čti na str. 4 dole. Jsou dány výroky:

A: Přirozené číslo $n$ je dělitelné devíti ... $9|n$.

B: Přirozené číslo $n$ je dělitelné třemi ..... $3|n$.

$A \Rightarrow B$ Jestliže je přirozené číslo $n$ dělitelné devíti, pak je dělitelné třemi ... $9|n \Rightarrow 3|n$ .... 1

$B \Rightarrow A$ Jestliže je přirozené číslo $n$ dělitelné třemi, pak je dělitelné devíti... $3|n \Rightarrow 9|n$ ... 0

Z pravdivosti implikace $A \Rightarrow B$ nevyplývá pravdivost obrácené implikace $B \Rightarrow A$.

Nyní obměněná implikace

Z logicky ekvivalentního výroku, který je na str. 4 dole,

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

vyplývá řešení následujících úloh.

Příklad 8: Snaž se vysledovat postup při vytváření obměn implikací.

a) A: Výpočet úlohy je správný.

B: Výsledkem výpočtu není číslo 15.

$\boxed{A \Rightarrow B}$

Jestliže $\boxed{\text{je}}$ výpočet úlohy správný, pak výsledkem tohoto výpočtu $\boxed{\text{není}}$ číslo 15.

$\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$

Jestliže $\boxed{\text{je}}$ výsledkem výpočtu číslo 15, pak $\boxed{\text{není}}$ tento výpočet správný.

---

b) A: Přirozené číslo n je dělitelné devíti.

B: — " — — " — — " — třemi.

$\boxed{A \Rightarrow B}$ $9 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$

Jestliže je přirozené číslo n dělitelné devíti, pak je dělitelné třemi.

$\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$ $3 \nmid n \Rightarrow 9 \nmid n$

Jestliže není přirozené číslo dělitelné třemi, pak není dělitelné devíti.

---

c) Implikace: Jestliže se řidič necítí zdráv, nevyjíždí s autem do silničního provozu.

Obměna: Jestliže řidič vyjíždí s autem do silničního provozu, pak se cítí zdráv.

---

d) Implikace: Jestliže podnik nedodržuje zákon o ochraně životního prostředí, platí pokuty za znečišťování životního prostředí.

Obměna: Jestliže podnik neplatí pokuty za znečišťování životního prostředí, pak dodržuje zákon o ochraně životního prostředí.

# TYPY VĚT A JEJICH DŮKAZY

<u>Důkaz</u> je úvaha, která zdůvodňuje platnost matematické věty.
Matematická věta může mít tvar implikace, nebo ekvivalence.

## Implikace

| | |
|---|---|
| Výrok A implikuje výrok B. | $V(A) \Rightarrow V(B)$ |

Což obecně můžeme zapsat

$$\boxed{\forall x \in M;\ V_1(x) \Rightarrow V_2(x)}$$

Důkaz této věty může mít 3 varianty. Vždy použijeme tu variantu, která se jeví jako nejvhodnější či nejschůdnější.

(1) <u>Důkaz přímý</u>. Vyjdeme z pravdivosti předpokladu dané věty a řetězcem implikací dospějeme k tomu, že závěr věty je pravdivý.

$$V_1(x) \Rightarrow R_1(x) \Rightarrow R_2(x) \Rightarrow R_3(x) \Rightarrow \dots V_2(x)$$

(2) <u>Důkaz nepřímý</u>. Původní implikaci nahradíme obměněnou implikací a její pravdivost dokazujeme přímým důkazem ($A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow \neg A$).

(3) <u>Důkaz sporem</u>. Provedeme negaci dané věty a pak dojdeme ke sporu, tzn. k takovému tvrzení, které nesouhlasí s předpokladem dané věty nebo s nějakým dříve dokázaným tvrzením.

<u>Příklad 9.</u> Ukázka věty tvaru implikace.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Jestliže | $\alpha, \beta, \gamma$ jsou vnitřní úhly $\triangle ABC$, | pak | $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. |
| | A | $\Rightarrow$ | B |
| | je předpoklad | | je závěr |

## Příklad 10: Dokažte větu pomocí přímého důkazu:

Jestliže $\boxed{n \text{ je sudé přirozené číslo}}$ (A) pak $\boxed{\text{také } n^2 \text{ je sudé přirozené číslo.}}$ (B)

Tuto větu lze zapsat symbolicky: $V_1(n) \Rightarrow V_2(n)$, čili

$\forall n \in N$; $2|n \Rightarrow 2|n^2$, např. $2|6 \Rightarrow 2|6^2$

Důkaz provedeme jako přímý řetězcem implikací

$\underbrace{\boxed{2|n}}_{V_1(n)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\exists k \in N: n = 2k}}_{R_1(n)}$

$2|n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 = 2.(2k^2) \Rightarrow 2|n^2$

$\underbrace{\boxed{n = 2k}}_{R_1(n)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{n^2 = (2k)^2}}_{R_2(n)}$

$R_1(n) \Rightarrow R_2(n)$

$\underbrace{\boxed{n^2 = (2k)^2}}_{R_2(n)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{n^2 = 4k^2}}_{R_3(n)}$

$\underbrace{\boxed{n^2 = 4k^2}}_{R_3(n)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{n^2 = 2.(2k^2)}}_{R_4(n)}$

$\underbrace{\boxed{n^2 = 2(2k)^2}}_{R_4(n)} \Rightarrow \underbrace{\boxed{2|n^2}}_{V_2(n)}$

---

## Příklad 11: Dokažte větu z příkladu 2 pomocí důkazu sporem.

Důkaz spočívá v rovnosti $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

A: $n$ je sudé, $\neg B$: $n^2$ je liché (*)

Pokusíme se tedy dokázat větu: Je-li $n$ sudé číslo, pak $n^2$ je liché číslo.

$2|n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2.(2k^2) \Rightarrow 2|n^2$,

$\underbrace{\text{čili } n^2 \text{ je sudé}}_{\text{protože je násobkem čísla 2.}}$, a to je v rozporu (*)

### Věta tvaru ekvivalence

| | |
|---|---|
| Výrok A je ekvivalentní s výrokem B | $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |

Příklad 12: $\forall r \in Z$ ; $\underbrace{r \text{ je sudé}}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{r^3 \text{ je sudé}}_{B}$ ... čili $2|r \Leftrightarrow 2|r^3$

$A \Leftrightarrow B$

$$A \Leftrightarrow B = A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$$

---

Důkaz: 1) $r$ je sudé $\Rightarrow r = 2k$

$r = 2k \Rightarrow r^3 = (2k)^3$

$r^3 = (2k)^3 \Rightarrow r^3 = 8k^3$

$r^3 = 8k^3 \Rightarrow r^3 = 2(4k^3)$

$\rightarrow r^3 = 2\cdot(4k^3) \Rightarrow 2|r^3$

Tím je důkaz věty $A \Rightarrow B$ proveden. Zbývá dokázat ještě $B \Rightarrow A$.

2) Důkaz $B \Rightarrow A$ provedeme sporem podle pomoci $\neg(B \Rightarrow A) = A \wedge \neg B$, čili $A$: $r$ je sudé $\wedge$ $r^3$ je liché

$r$ je sudé $\Rightarrow r = 2k$

$r = 2k \Rightarrow r^3 = (2k)^3$

$r^3 = (2k)^3 \Rightarrow r^3 = 8k^3$

$r^3 = 8k^3 \Rightarrow r^3 = \underbrace{2(4k^3)}$

a to je sudé číslo a mělo platit, že je liché
věta $B \Rightarrow A$ neplatí.

Příklad: $r^3 = 10$, $r = \sqrt[3]{10}$, a to není sudé číslo

Věta tvaru ekvivalence neplatí.

---

Příklad 13: Dokažte větu. $\forall n \in N : 5|n \Rightarrow 30|n^3 - n$

Důkaz: Vyjdeme z předpokladu, že $\underline{n}$ je dělitelné 5 a dokážeme, že $(n^3 - n)$ je dělitelné 30.

$n^3 - n = n(n^2-1) = n.(n+1).(n-1)$, seřadíme podle velikosti,

$(n-1).\,n\,(n+1)$ ... dostáváme součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel, jedno z nich je určitě sudé, tj. násobek 2, a jedno z nich je určitě násobek 3. Číslo $\underline{n}$ je podle předpokladu násobek 5. Proto $n^3 - n$ je tedy dělitelný součinem $2.3.5 = 30$.

---

Příklad 14: Dokažte, že $\sqrt{3}$ není racionální číslo. Důkaz proveďte tak, že využijete pomocné věty $V_1 : \forall n \in N ; 3|n^2 \Rightarrow 3|n$

$\boxed{\sqrt{3} \notin Q}$ máme dokázat (12)

$V_2 : \forall p, q \in N ; p^2 = 3q^2 \Rightarrow p, q$ jsou soudělná čísla

Důkaz věty $V_1$ provedeme jako nepřímý důkaz, tj. pomocí obměny věty $V_1$.

$V_1: \forall n \in N;\ 3|n^2 \Rightarrow 3|n$

Obměna $V_1$: $\forall n \in N; 3\nmid n \Rightarrow 3\nmid n^2$

$3\nmid n \Rightarrow \exists p \in N\ ;\ \underbrace{n=3p+1}_{a)} \vee \underbrace{n=3p+2}_{b}$

a) $n=3p+1 \Rightarrow n^2=(3p+1)^2=9p^2+6p+1=3\underbrace{(3p^2+2p)}_{\text{označme } k;\ k\in N}+1=3k+1$

$n^2=3k+1 \Rightarrow 3\nmid n^2$

b) $n=3p+2 \Rightarrow n^2=(3p+2)^2=9p^2+12p+4=\underline{9p^2+12p+3}+1=$

$=3\underbrace{(3p^2+4p+1)}_{\text{označme } l;\ l\in N}+1=3l+1$

$n^2=3l+1 \Rightarrow 3\nmid n^2$

Tím je důkaz věty $V_1$ proveden.

---

Důkaz věty $V_2$ provedeme jako přímý důkaz řetězcem implikací.

$V_2: \forall p,q \in N;\ p^2=3q^2 \Rightarrow$ jsou soudělná čísla, tzn. mají alespoň jednoho společného dělitele kromě čísla 1.

1) $p^2=3q^2 \Rightarrow 3|p^2$ a podle věty $V_1$ platí:

$3|p^2 \Rightarrow 3|p$

$3|p \Rightarrow \exists m \in N\ ;\ p=3m$

$p=3m \Rightarrow p^2=(3m)^2$ a podle řádku 1) platí

$p^2=3q^2$

$(3m)^2=3q^2$

$9m^2=3q^2 \quad |:3$

$3m^2=q^2 \Rightarrow 3|q^2$

$(3|q^2 \Rightarrow 3|q) \Rightarrow p, q$ jsou soudělná čísla.

---

Dokažte větu $V: \sqrt{3} \notin Q$.

Důkaz provedeme sporem odvěrem věty s jejím předpokladem.

Připustíme tedy, že $\sqrt{3} \in Q$ (náš předpoklad).

$\sqrt{3} \in Q \Rightarrow \exists p, q \in N$, že $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, $p, q$ jsou nesoudělná čísla, tzn., že zlomek $\frac{p}{q}$ nelze krátit.

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = q \cdot \sqrt{3} \Rightarrow p^2 = 3q^2$$

$p^2 = 3q^2 \Rightarrow$ podle věty $V_2$: $p, q$ jsou soudělná čísla, a to je spor s naším předpokladem. Proto platí opak: $\sqrt{3} \notin Q$.

---

Příklad 15: Dokažte větu:

a) $\forall a, b, c \in N;\ a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$, např. $3|12 \wedge 12|36 \Rightarrow 3|36$

Přímý důkaz:

$(a|b \wedge b|c) \Rightarrow \exists k \in N;\ \underline{b = k.a} \wedge \exists l \in N;\ \underline{c = b.l} \Rightarrow c = \underbrace{k.a}.l =$

$c = k.a.l$

$= \underbrace{kl}_{p \in N}.a = p.a$

$c = p.a \Rightarrow a|c$

---

b) $a, b, c \in N;\ (a|b \wedge a|c) \Rightarrow a|(b+c)$

např. $(5|10 \wedge 5|15) \Rightarrow 5|(10+15) = 5|25$

Přímý důkaz:

$(a|b \wedge a|c) \Rightarrow \exists k, l \in N;\ b = k.a \wedge c = l.a \Rightarrow ka + la = b + c =$

$= a\underbrace{(k+l)}_{p \in N} = a.p$

$b + c = a.p \Rightarrow a|b+c$

---

c) $\forall t \in N;\ 3|(t^3 - t)$

$t^3 - t = t(t^2 - 1) = \underbrace{(t-1).t.(t+1)}$

To jsou tři po sobě následující přir. čísla, z nichž jedno je určitě dělitelné třemi. Věta proto platí.

---

d) $\forall k \in N;\ (3|k \wedge 5|k) \Rightarrow 15|k^2$

$(3|k \wedge 5|k) \Rightarrow \exists m, n: k = 3m \wedge k = 5n$

$k.k = 3m.5n = k^2 = 15mn$

$k^2 = 15mn \Rightarrow 15|k^2$

## Příklad 16:

$\forall$ různé libovolné přímky $a, b, c$ : $\underbrace{(c \perp a) \wedge (c \perp b) \Rightarrow a \parallel b}_{\text{věta } V}$

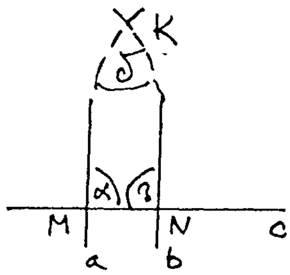
$V$: $\underbrace{(c \perp a) \wedge (c \perp b)}_{\text{předpoklad } A} \Rightarrow \underbrace{a \parallel b}_{\text{závěr } B}$ ; provedeme negaci $V$

$\neg V$: $(c \perp a) \wedge (c \perp b) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$\underbrace{(c \perp a) \wedge (c \perp b)}_{①} \wedge \underbrace{a \nparallel b}_{②}$

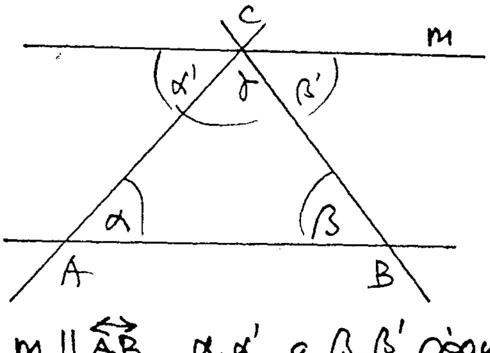
z ① $(c \cap a) = \{M\} \wedge (c \cap b) = \{N\}$, z ② $a \cap b = \{K\}$

Body $M, N, K$ tvoří pak vrcholy $\triangle MNK$, proto $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, avšak $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\delta = 0°$, což je ve sporu s větou o součtu velikostí vnitřních úhlů $\triangle$. Proto $\neg V$ neplatí. A když negace $V$ neplatí, tak platí $V$.




## Příklad 17: Dokažte větu: Součet velikostí všech vnitřních úhlů $\triangle$ je roven $180°$.

Jestliže $\boxed{\alpha, \beta, \gamma \text{ jsou vnitřní úhly } \triangle ABC,}$ pak $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$




Použijeme axiom (základní větu přijatou bez důkazu): K přímce AB prochází daným bodem C ($C \notin \overleftrightarrow{AB}$) jediná rovnoběžka (např. m).

$m \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $\alpha, \alpha'$ a $\beta, \beta'$ jsou střídavé úhly $\Rightarrow \alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180° \Rightarrow \alpha + \gamma + \beta = 180°$

Větu lze též dokázat nepřímým důkazem, tj. obměnou dané věty:

$\alpha + \beta + \gamma \neq 180° \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$ nejsou vnitřní úhly $\triangle$.

Příklady ze sbírky pro OA na str. 9 a 10

1. V každé z následujících vět odlište jednotlivé výroky a logické spojky.

a) $\underbrace{7\cdot 3=21}_{A}$ a $\underbrace{4\leqq 1}_{B}$ … konjunkce

$A \wedge B$

b) $\underbrace{\text{Petr šel do kina}}_{A}$ $\underset{a}{\text{a}}$ $\underbrace{\text{Karel šel do knihovny}}_{B}$ … konjunkce

c) Není pravda, že $3>7$: je to negace výroku $3>7$.

$V: 3>7$ $(V')\neg V: 3\leqq 7$ negace výroku

d) Jan půjde na večeři nebo zůstane doma.

$\underbrace{\text{Jan půjde na večeři}}_{A}$ $\underset{\vee}{\vee}$ $\underbrace{\text{Jan zůstane doma}}_{B}$ … disjunkce

e) Jestliže bude sníh, pojedu lyžovat

Bude sníh $\Rightarrow$ pojedu lyžovat … implikace

Jestliže $\underbrace{\boxed{\text{bude sníh}}}_{A}$, pak $\underbrace{\boxed{\text{pojedu lyžovat}}}_{B}$

$A \Rightarrow B$

f) Číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když je děl. dvěma

$4|n \Leftrightarrow 2|n$, $n\in N$

Ekvivalence, ale nepravdivá. Pravdivá je pouze $4|n \Rightarrow 2|n$

$4|8 \Leftrightarrow 2|8$ ale $2|6$, ale $4\nmid 6$

2. Máme výroky: A: Trojúhelník je pravoúhlý.

B: V trojúhelníku platí Pyth. věta

Konjunkce: $\triangle$ je pravoúhlý $\wedge$ v $\triangle$ platí P. věta.

Disjunkce: $\triangle$ je pravoúhlý $\vee$ v $\triangle$ platí P. věta.

Implikace: $\underbrace{\text{Jestliže je } \triangle \text{ pravoúhlý}}_{A}$, pak $\underbrace{\text{v tomto } \triangle \text{ platí P. věta}}_{B}$.

$A \Rightarrow B$ nebo $B \Rightarrow A$

Ekvivalence: $\triangle$ je pravoúhlý $\Leftrightarrow$ v $\triangle$ platí P. věta

právě když

3. Vytvořte negaci těchto výroků:

| Výrok | Jeho negace |
|---|---|
| Bude nás tam nejméně 6. | Bude nás tam nejvýše 5. |
| Nikdo nebyl proti návrhu. | Aspoň 1 byl proti návrhu |
| Dané křivky se protínají právě ve 2 bodech | Dané křivky se protínají buď v 1 bodě nebo aspoň ve 3 bodech. |
| Budu studovat nejvýše 5 let. | Budu studovat nejméně 6 let. |

4. V následujících větách najděte jednoduché výroky, z nichž jsou věty složeny, označte je symboly, určete příslušné logické spojky a dané věty zapište symbolicky.

a) V zimě sněží a mrzne.

$A \wedge B$, kde A: V zimě sněží; B: V zimě mrzne.

b) Na večeři přijde Petr nebo Pavel.

$A \vee B$, kde: A: Na večeři přijde Petr.
B: –"– –"– –"– Pavel

c) Není pravda, že mám sourozence.

$\neg A = A'$ $A'$, kde A: mám sourozence.

d) Když se budu učit, dosáhnu lepších výsledků.

$A \Rightarrow B$, kde A: Budu se učit; B: Dosáhnu lepších výsledků.

e) Podám si přihlášku na vysokou školu, právě tehdy, když dobře odmaturuji.

$A \Leftrightarrow B$, kde A: Podám si přihlášku na VŠ.
B: Dobře odmaturuji.

5. Určete pravdivostní hodnoty výrokových formulí.

a) $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (B \Leftrightarrow \neg A)$

| $A \quad B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow \neg B$ | $B \Leftrightarrow \neg A$ | $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (B \Leftrightarrow \neg A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A \quad B$ | $A'$ | $B'$ | $A \Rightarrow B'$ | $B \Leftrightarrow A'$ | $(A \Rightarrow B') \wedge (B \Leftrightarrow A')$ |
| 1 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B')$

| $A \quad B$ | $B'$ | $A \Rightarrow B$ | $A \wedge B'$ | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B')$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$

| $A \quad B$ | $A'$ | $B'$ | $A \Rightarrow B$ | $B' \Rightarrow A'$ | $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

je to tautologie

d) $(A \vee B) \wedge (B' \vee A')$

| $A \quad B$ | $A'$ | $B'$ | $A \vee B$ | $B' \vee A'$ | $(A \vee B) \wedge (B' \vee A')$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

e) $(A' \wedge B') \vee (B \Rightarrow A')$

| A B | $A'$ | $B'$ | $A' \wedge B'$ | $B \Rightarrow A'$ | $(A' \wedge B') \vee (B \Rightarrow A')$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

f) $(A \vee B') \Rightarrow (C \wedge B)$

| A B C | $B'$ | $A \vee B'$ | $C \wedge B$ | $(A \vee B') \Rightarrow (C \wedge B)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 0 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 0 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

g) $(C \Rightarrow A') \wedge (B' \Leftrightarrow C)$

| A B C | $A'$ | $B'$ | $C \Rightarrow A'$ | $B' \Leftrightarrow C$ | $(C \Rightarrow A') \wedge (B' \Leftrightarrow C)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 0 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |