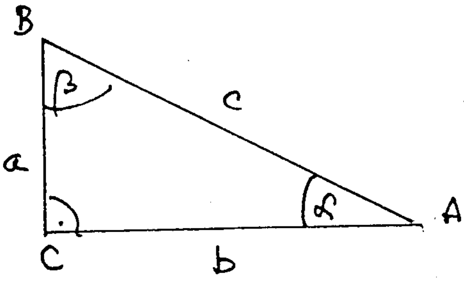
1. Goniometrické funkce ostrého úhlu pravoúhlého △ a jejich užití



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Poznámka: RΔ označení v tomto textu pravoúhlý Δ.

Příklad 1: Sestrojte RΔABC, ve kterém je délka přepony $c = 6\,\text{cm}$ a $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Řešení: $\sin\alpha = \frac{3}{5}\ (=0{,}6)$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ nebo $\quad \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$a = c\cdot\sin\alpha$

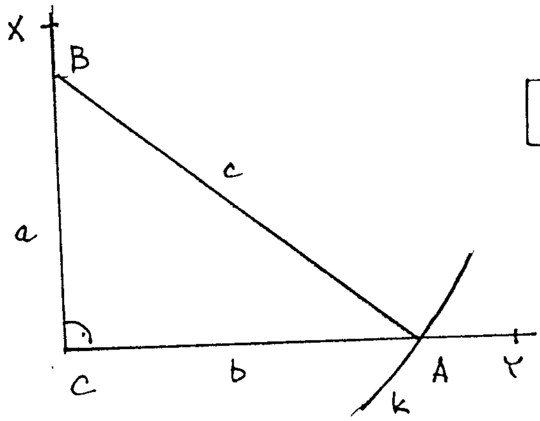
$a = 6\cdot 0{,}6$

$\boxed{a = 3{,}6}$

5 dílů je 6 cm

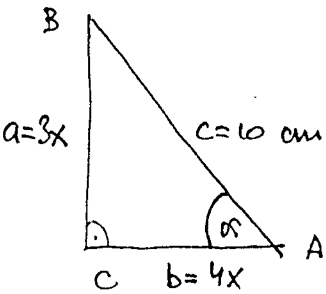
1 díl je $6:5 = 1{,}2$

3 díly … $1{,}2\cdot 3 = \boxed{3{,}6}$



1) Sestrojíme pravý úhel XCB
2) BC; $|BC| = a = 3{,}6\,\text{cm}$
3) k; $k(B; 6\,\text{cm})$
4) A; $A \in k \cap \mapsto CA$

Příklad 2: V RΔABC: $c = 10\,\text{cm}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Vypočítejte $|AC|, |BC|$



$(3x)^2 + (4x)^2 = 10^2$

$9x^2 + 16x^2 = 100$

$25x^2 = 100$

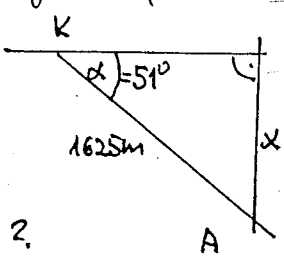
$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} 2 \\ -2 \text{ nevyhovuje} \end{cases}$

$a = 3\cdot 2 = 6$, $\boxed{|BC| = 6\,\text{cm}}$

$b = 4\cdot 2 = 8$, $\boxed{|AC| = 8\,\text{cm}}$

Příklad 3: Dvě přímé silnice se křižují v místě K v úhlu $\alpha = 51°$. Místo A na jedné z těchto silnic, vzdálené 1625 m od křižovatky K, má být spojeno nejkratší cestou s druhou silnicí. Jak dlouhá bude tato spojka?

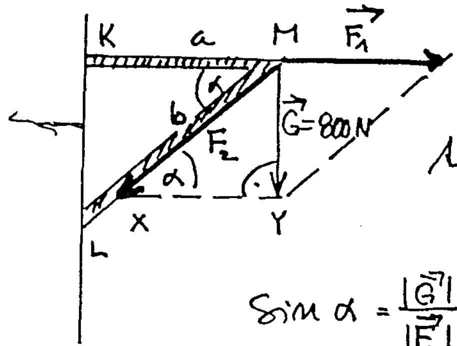


$\sin\alpha = \frac{x}{|AK|}$

$\sin 51° = \frac{x}{1625}$

$\boxed{x \doteq 1263\,\text{m}}$

Příklad 4: Ramena a, b nosníku svírají úhel o velikosti $|\sphericalangle LMK| = \alpha = 48°$. Nosník je zatížen břemenem $G = 800\,N$. Určete velikost F_1 tahové síly a velikost F_2 tlakové síly (viz obrázek).



$\sphericalangle LMK \cong \sphericalangle MXY$ (střídavé úhly)

V PΔ MXY platí:

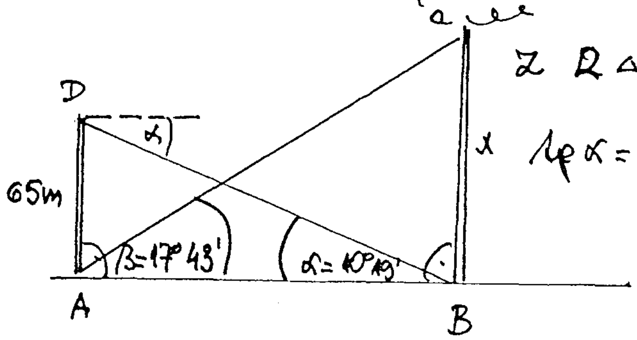
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\vec{G}|}{|\vec{F_1}|} \;\ldots\; \operatorname{tg}48° = \frac{800}{|\vec{F_1}|} \;\ldots\; |\vec{F_1}| = \frac{800}{\operatorname{tg}48°}$$

$$\boxed{|\vec{F_1}| \doteq 720\,N}$$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{G}|}{|\vec{F_2}|} \;\ldots\; \sin 48° = \frac{800}{|\vec{F_2}|}$$

$$|\vec{F_2}| = \frac{800}{\sin 48°} \;\ldots\; \boxed{|\vec{F_2}| \doteq 1077\,N}$$

Příklad 5: Na vodorovné rovině stojí 65 m vysoká věž a opodál továrenský komín. Z vrcholu věže vidíme patu komína v hloubkovém úhlu $\alpha = 10°19'$ a od paty věže vidíme vrchol komína ve výškovém úhlu $\beta = 17°43'$. Jak vysoký je komín (viz obr.)?



Z PΔ BDA vypočítáme |AB|.

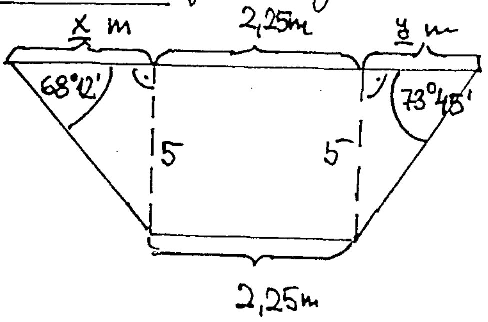
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AD|}{|AB|} \;\ldots\; |AB| = \frac{|AD|}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$|AB| = \frac{65}{\operatorname{tg}10°19'} \doteq 357{,}08\ldots$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|BC|}{|AB|} \;\ldots\; \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{|AB|} \;\ldots\; x = |AB|\cdot\operatorname{tg}\beta$$

$$x \doteq 357{,}08\,\operatorname{tg}17°43' \doteq \boxed{114{,}07\ (m)}$$

OA **Příklad 6** (podle úl. 17 na str. 82 ve sbírce pro OA (obch. akad.))



$$\operatorname{tg}68°12' = \frac{5}{x} \qquad\qquad \operatorname{tg}73°45' = \frac{5}{y}$$

$$x = \frac{5}{\operatorname{tg}68°12'} \qquad\qquad y = \frac{5}{\operatorname{tg}73°45}$$

$$x \doteq 1{,}999.. \qquad\qquad y \doteq 1{,}457\ldots$$

$$1{,}999\ldots + 2{,}25 + 1{,}457.. = 5{,}707 \qquad \boxed{5{,}707\ m}$$

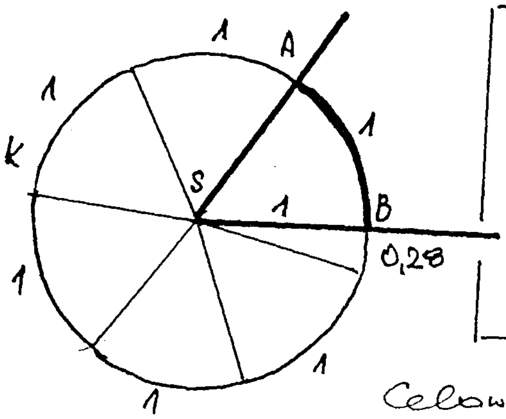
2. Velikost úhlu v míře stupňové a obloukové

1° je $\frac{1}{90}$ pravého úhlu, $\frac{1}{180}$ přímého úhlu, $\frac{1}{360}$ plného úhlu.

$1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, $1' = \frac{1}{60}{}^\circ$, $1'' = \frac{1}{60}{}'$, $1'' = \frac{1}{3600}{}^\circ$

Jestliže velikosti úhlů zapisujeme ve stupních, říkáme, že užíváme stupňovou míru úhlů.

Uvažujme o tzv. jednotkové kružnici k se středem S a poloměrem 1 (tedy, např. 1cm, 1dm, 1 jakýkoli díl).



Definice: Úhel, jehož ramena SA a SB vytínají na jednotkové kružnici k oblouk, jehož délka se rovná poloměru této kružnice (tj. 1), se nazývá radián.

Celou rovinu (plný úhel o velikosti 360°) lze rozdělit přibližně na 6,28 radiánů. Jednotková kružnice má délku $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ radiánů. Místo 2π radiánů říkáme stručně jen 2π. Slovo radián lze vynechat.

Příklad 1: Kolik úhlových stupňů je 1 radián?

2π rad ..... 360°
1 rad ..... x°

$$\frac{x}{360} = \frac{1}{2\pi} \quad \dots x = \frac{360}{2\pi} \quad \left(\alpha = \frac{180}{\pi}\right)$$

$\alpha \doteq 57^\circ 17' 45''$

$$\boxed{1\,\text{rad} \doteq 57^\circ 17' 45''}$$

$$\boxed{1\,\text{rad} = \frac{180}{\pi}}$$

Ze vztahu $1\,\text{rad} = \frac{180}{\pi}$ odvodíme následující vzorce:

1 rad .... $\frac{180}{\pi}$
x rad .... α

$$\frac{x}{1} = \frac{\alpha}{\frac{180}{\pi}} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi\alpha}{180}} \quad \text{tzn.} \quad x\,\text{rad} = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$$

Převod stupňů na radiány

$$\frac{\alpha}{\frac{180}{\pi}} = \frac{x}{1} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi}} \quad \text{tzn.} \quad \boxed{\alpha^\circ = \frac{x\,\text{rad} \cdot 180^\circ}{\pi}} \rightarrow$$ Převod radiánů na stupně.

Příklad 8: Vyjádřete ve stupňové míře velikosti úhlů dané obloukovou mírou:

a) $\frac{2}{5}\pi$ b) $\frac{7}{9}\pi$ c) $\frac{8}{13}\pi$

a) 1. postup ... Oblouku o délce π odpovídá $180°$.

$$\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5} \text{ z } 180° = \frac{2}{5}\cdot 180° = \boxed{72°}$$

2. postup ... pomocí vzorce

$$\alpha = \frac{x\,\text{rad}\cdot 180}{\pi} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\cancel{\pi}\cdot 180}{\cancel{\pi}} = \frac{2}{5}\cdot 180 = 72\ ;\ \boxed{72°}$$

1. postup je rychlejší.

b) $\frac{7}{9}\pi = \frac{7}{9}\cdot 180° = \boxed{140°}$ | c) $\frac{8}{13}\cdot 180° \doteq 110°46'$

Příklad 9: Vyjádřete v obloukové míře velikosti úhlů daných ve stupňové míře:

a) $74°35'$ b) $32°14'56''$ c) $338°12'$

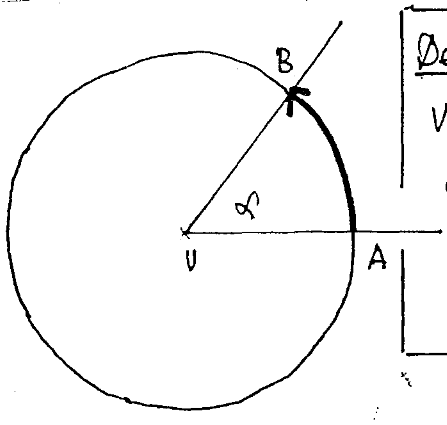
a) $$x = \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{\pi\cdot(74°35')}{180} = \frac{\pi\cdot 74\frac{35}{60}}{180} = \pi\cdot\frac{179}{432} \doteq \boxed{1{,}3}$$, tzn. 1,3 rad.

Na kalkulačce:

$\boxed{(}$ 74°35° $\boxed{)}$ $\boxed{:}$ 180 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{°'''}$ $\boxed{1{,}3}$ (rad)

b) $32°14'56'' \doteq \boxed{0{,}562\,849\ (\text{rad})}$ | c) $338°12' \doteq \boxed{5{,}9}$ (rad)

3. Orientovaný úhel a jeho základní velikost



Definice: Uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V se nazývá orientovaný úhel AVB ($\widehat{AVB}$).

$\overrightarrow{VA}$ ... počáteční rameno

$\overrightarrow{VB}$ ... koncové rameno

Definice: Velikost úhlu α, který opíše polopřímka při otočení z počátečního ramene VA do koncového ramene VB v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček), se nazývá základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.
$0 \leqq x < 2\pi$
$0 \leqq \alpha < 2\pi$ nebo $0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$

Příklad 10: Vypočítejte základní velikost α orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, je-li jedna z jeho velikostí:

a) $\frac{17}{3}\pi$ ... Základní velikost or. úhlu $\widehat{AVB}$ je zbytek dělení dané velikosti 360 nebo 2π. Je-li zbytek záporný úhel, tak se odečte od 360° (2π). Je-li použito π, tak je následující postup.

$\frac{17}{3}\pi = 5\frac{2}{3}\pi = \cancel{4\pi} + 1\frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ $\boxed{\alpha = \frac{5}{3}\pi}$ $\widehat{AVB} = \alpha + k.2\pi$

$\alpha = \widehat{AVB} - k.2\pi$

b) $1040^\circ = 320^\circ + 2.360^\circ$

$1040^\circ : 360 = 2$

$\underbrace{320^\circ}_{\alpha}$ $\boxed{\alpha = 320^\circ}$

c) -1826°

$-1826^\circ : 360^\circ = -5$

-26°

$$\begin{array}{r} 360^\circ \\ -\ 26^\circ \\ \hline \underbrace{334^\circ}_{\alpha} \end{array}$$

$\boxed{\alpha = 334^\circ}$

$-1826^\circ = -26^\circ - 5.360^\circ = 334^\circ - 6.360^\circ$

$-5-1=-6$

d) $19\pi = \cancel{18\pi} + \pi$

$19\pi : 2 = 9\pi$ $\boxed{\alpha = \pi}$

1π

e) $23\frac{1}{2}\pi = \cancel{22\pi} + 1\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$ $\boxed{\alpha = \frac{3}{2}\pi}$

f) $-\frac{83}{5}\pi = -16\frac{3}{5}\pi = -\cancel{16\pi} - \frac{3}{5}\pi$ ... $2\pi - \frac{3}{5}\pi = 1\frac{2}{5}\pi = \frac{7}{5}\pi$ $\boxed{\alpha = \frac{7}{5}\pi}$

g) $-450^\circ 10'$

$-450^\circ 10' : 360 = 1\ (-1)$

$-90^\circ 10'$

$$\begin{array}{r} 360^\circ = 359^\circ 60' \\ -\ 90^\circ 10' \\ \hline 269^\circ 50' \end{array}$$

$-450^\circ 10' = 269^\circ 50' - 2.360^\circ$

$\boxed{\alpha = 269^\circ 50'}$

h) $1800^\circ = 0^\circ + 5.360^\circ$ $\boxed{\alpha = 0^\circ}$

$1800^\circ : 360 = 5$

0°

i) $-290^\circ = 70^\circ - 1.360^\circ$

$360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$ $\boxed{\alpha = 70^\circ}$

j) 38π ... $38\pi : 2 = 19\pi$ ... $38\pi = 2.19\pi$ $\alpha = 0\pi$ $\boxed{\alpha = 0}$

h) $-6326°13' : 360° = 17\ (+1)$

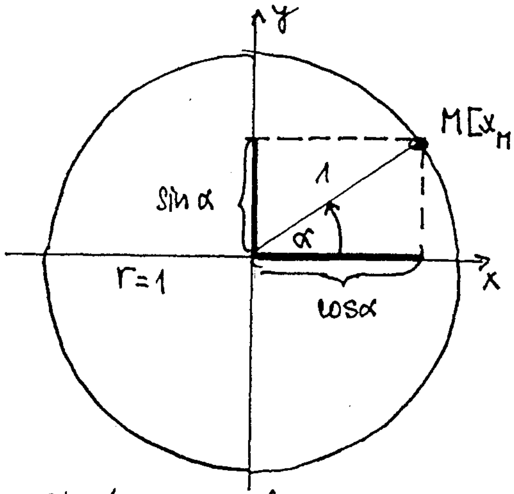
$-116°13'$

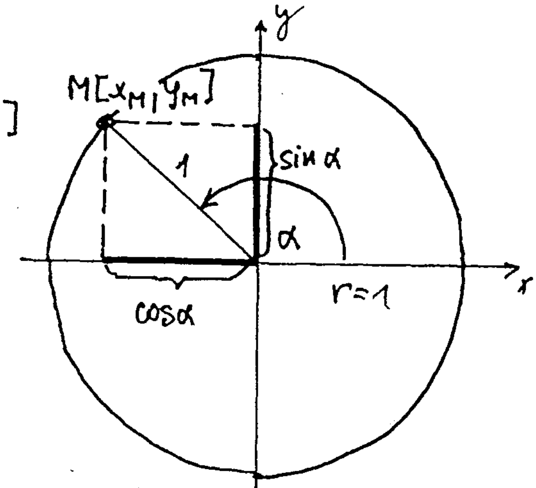
$$\begin{array}{r} 359°60' \\ -116°13' \\ \hline 243°47' \end{array}$$

$$\boxed{\alpha' = 243°47'}$$

Platí: $-6326°13' = -18 \cdot 360° + 243°47'$

4. Goniometrické funkce sinus a kosinus definované pomocí orientovaného úhlu $\alpha = \widehat{AVB}$ v základní poloze ($V = O[0,0]$ v soustavě souřadnic)





Definice: Souřadnice y bodu M (y_M) se nazývá sinus úhlu α.

$$\boxed{\sin\alpha = y_M} \qquad \ldots \sin x \ldots$$

Souřadnice x bodu M (x_M) se nazývá kosinus úhlu α.

$$\boxed{\cos\alpha = x_M} \qquad \cos x \ldots$$

Obě funkce jsou periodické. Jejich (nejmenší) perioda je 2π.

$$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$$

$$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$$

Obě funkce budeme zpravidla sledovat v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ v představě si zopakujme:

Tangens úhlu α je poměr souřadnice y bodu M (y_M) k souřadnici x bodu M (x_M) $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_M}{x_M}}$ pro $x_M \neq 0$, neboli:

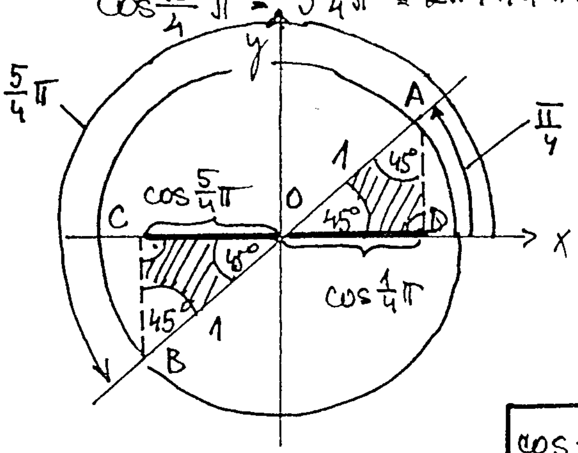
$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ pro $\cos\alpha \neq 0$

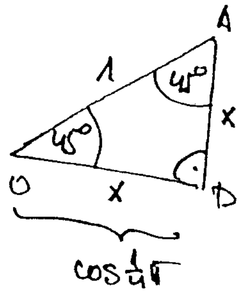
Kotangens uhla α je pomer súradnice x bodu M (x_M) k súradnici y bodu M (y_M). $\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x_M}{y_M}}$ pre $y_M \neq 0$, alebo

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$ pre $\sin\alpha \neq 0$

Príklad 11: Vyjadrite vo tvare lomeného výrazu $\cos\frac{13}{4}\pi$.

$\cos\frac{13}{4}\pi = 3\frac{1}{4}\pi = 2\pi + 1\frac{1}{4}\pi = 2\pi + \frac{5}{4}\pi \dots \boxed{\alpha = \frac{5}{4}\pi}$





Označme $|AD| = |OD| = x$

$x^2 + x^2 = 1^2$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

v $\triangle AOD$ je $\cos\frac{1}{4}\pi$ (45°) kladná hodnota.

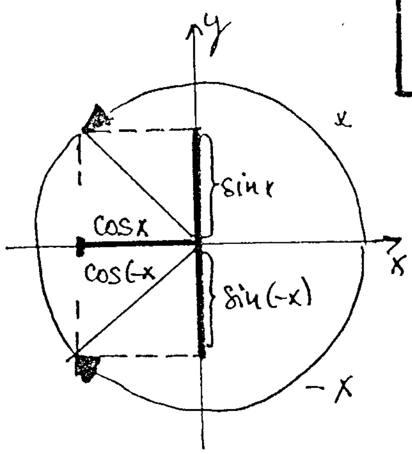
v $\triangle BOC$ je $\cos\frac{5}{4}\pi$ (225°) záporná hodnota.

$\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{\cos\frac{13}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Z obrázku je tiež zrejmé, že:

$\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Pre každé $x \in R$ je

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

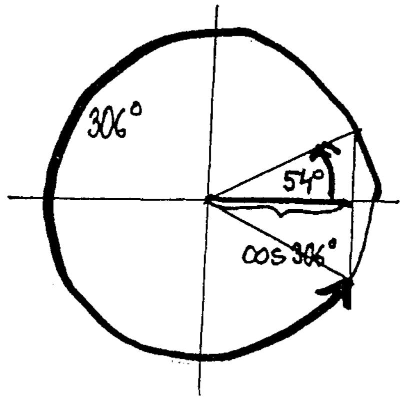
Príklad 12: Dokážte, že platí: a) $\sin 20° = \sin 740°$, b) $\cos 54° = \cos(-1026°)$, c) $\sin 80° = \sin(-1000°)$ d) $\cos(-1750°) = \cos 50°$

a) $740° : 360° = 2$
$20°$

$\sin 740° = \sin(20° + 2\cdot\cancel{360°}) = \sin 20°$

---

b) $\cos(-1026°) = \cos 1026° = \cos 306° = \cos 54°$



$1026° : 360° = 2$
$306°$

$360° - 306° = 54°$

nebo $-1026° : 360° = \underline{-2}(-1)$
$-306°$

$$\begin{array}{r} 360° \\ -\ 306° \\ \hline 54° \end{array}$$

protože odčítám od 360° tak místo −2 je to −3

$\cos(-1026°) = \cos(54° - 3\cdot\cancel{360°}) = \cos 54°$

---

c) $\sin(-1000°) = \sin(80° - 3\cdot\cancel{360°}) = \sin 80°$

$-1000° : 360° = \underbrace{-2(-1)}$
$-280° \qquad = -3$

$$\begin{array}{r} 360° \\ -280° \\ \hline 80° \end{array}$$

---

d) $\cos(-1750°) = \cos(50° - 5\cdot\cancel{360°}) = \cos 50°$

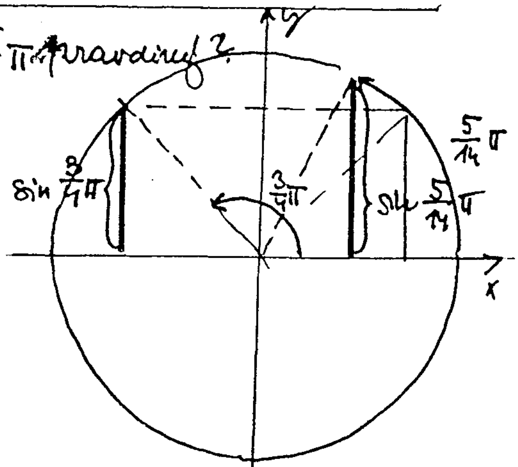
$-1750° : 360° = \underline{-4}(-1)$
$-310° \qquad = -5$

$$\begin{array}{r} 360° \\ -\ 310° \\ \hline 50° \end{array}$$

<u>Příklad 13:</u> Je nerovnost $\sin \frac{3}{4}\pi < \sin \frac{5}{14}\pi$ pravdivá?

<u>1. postup:</u> $\frac{3}{4}\pi \to 135°$ $\quad \frac{5}{14}\pi \to 64°17'$

(viz. obr.)



<u>2. postup:</u> Pomocí kalkulačky:

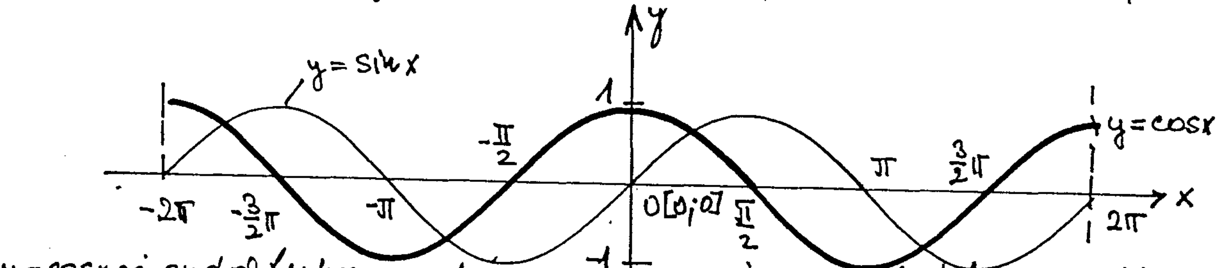
$\frac{3}{4}\pi \ldots 135°$ $\quad \frac{5}{14}\pi \ldots \doteq 64°17'$

$\sin 135° \doteq 0{,}7071$, $\sin 64°17' = 0{,}9$ $\quad$ Daná nerovnost je pravdivá.

---

5. Grafy goniometrických funkcí sin x, cos x aj.

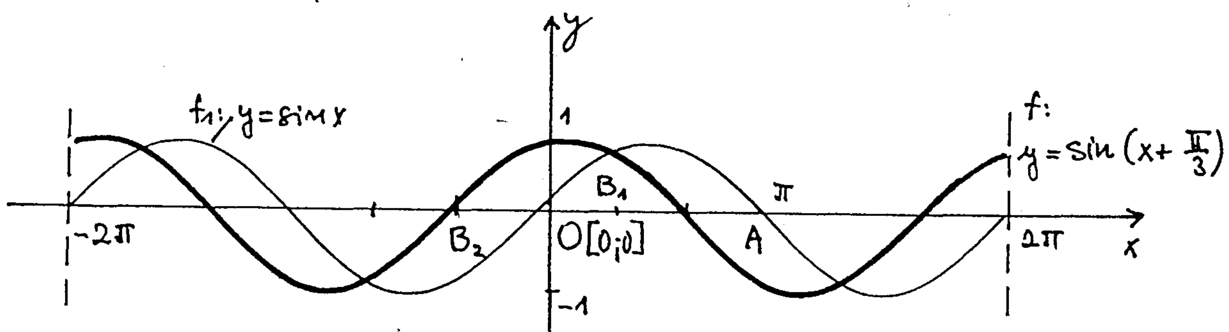
Příklad 14: V jedné soustavě Oxy sestrojte grafy funkcí $f_1: y = \sin x$, $f_2: y = \cos x$ v intervalu $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.



$y = \cos x$ je sudá funkce, graf je souměrný podle osy y.

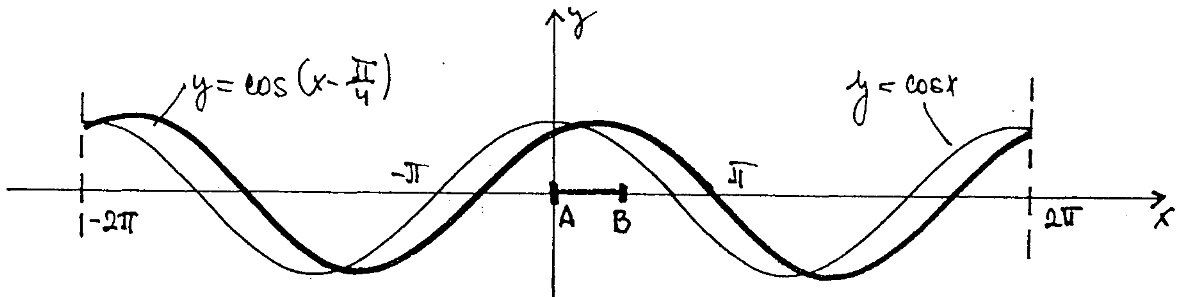
$y = \sin x$ je lichá funkce, její graf je souměrný podle počátku O[0;0] soustavy o.

Příklad 15: V téže soustavě souřadnic Oxy sestrojte grafy funkcí $f_1: y = \sin x$, $f_2: y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 60° v intervalu $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.



$|OA| = \pi$ .. Délku úsečky OA dělíme 3. Získáme délku úsečky OB_1. Graf funkce $y = \sin x$ posuneme o úsečku OB_2 ($|OB_2| = |OB_1|$) doleva ve směru záporné poloosy x.

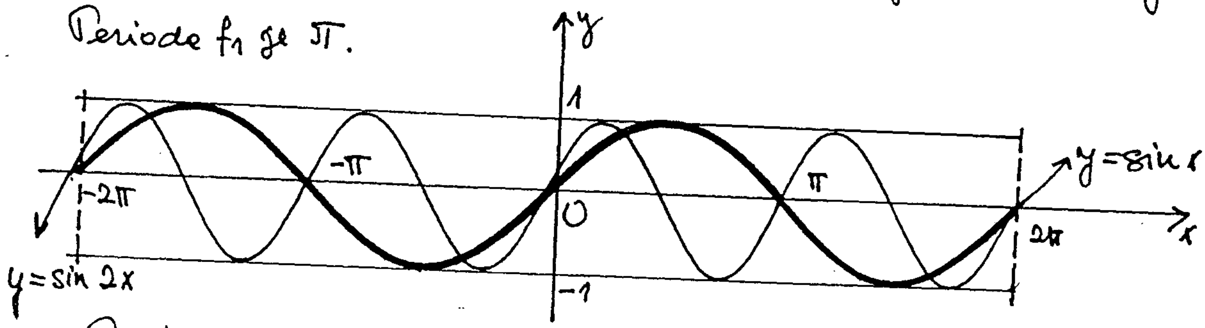
Příklad 16: Sestrojte v téže soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $f_1: y = \cos x$, $f_2: y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ v int. $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.



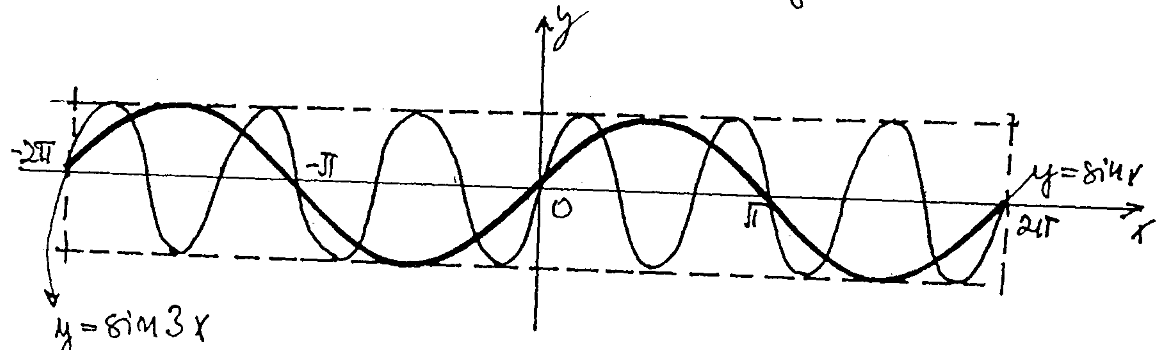
$|AB| = \frac{\pi}{4} \doteq 0{,}79$. Graf funkce $y = \cos x$ posuneme doprava ve směru kladné poloosy x.

Příklad 17: Sestrojte grafy funkcí $f_1: y = \sin 2x$, $f_2: y = \sin 3x$.

Perioda f_1 je π.



Postup: Interval $\langle 0; \pi \rangle$ rozdělíme u f_1 na 2 shodné díly, u f_2 na tři shodné díly.

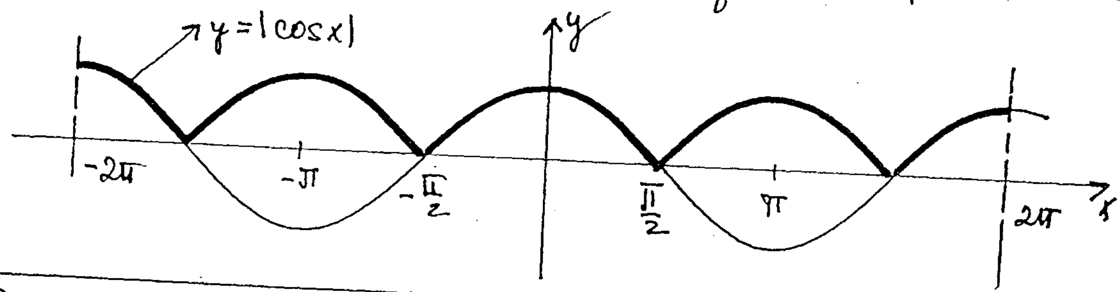


Poznámka: Obdobně se postupuje u funkcí $y = \cos 2x$, $y = \cos 3x$, $y = \cos 5x$ ...

Příklad 18: Sestrojte graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Protože $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, tak platí: $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos -\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$ $= \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, a graf je stejný jako v příkladě 16.

Příklad 19: Sestrojte graf funkce $y = |\cos x|$ v intervalu obrázku.

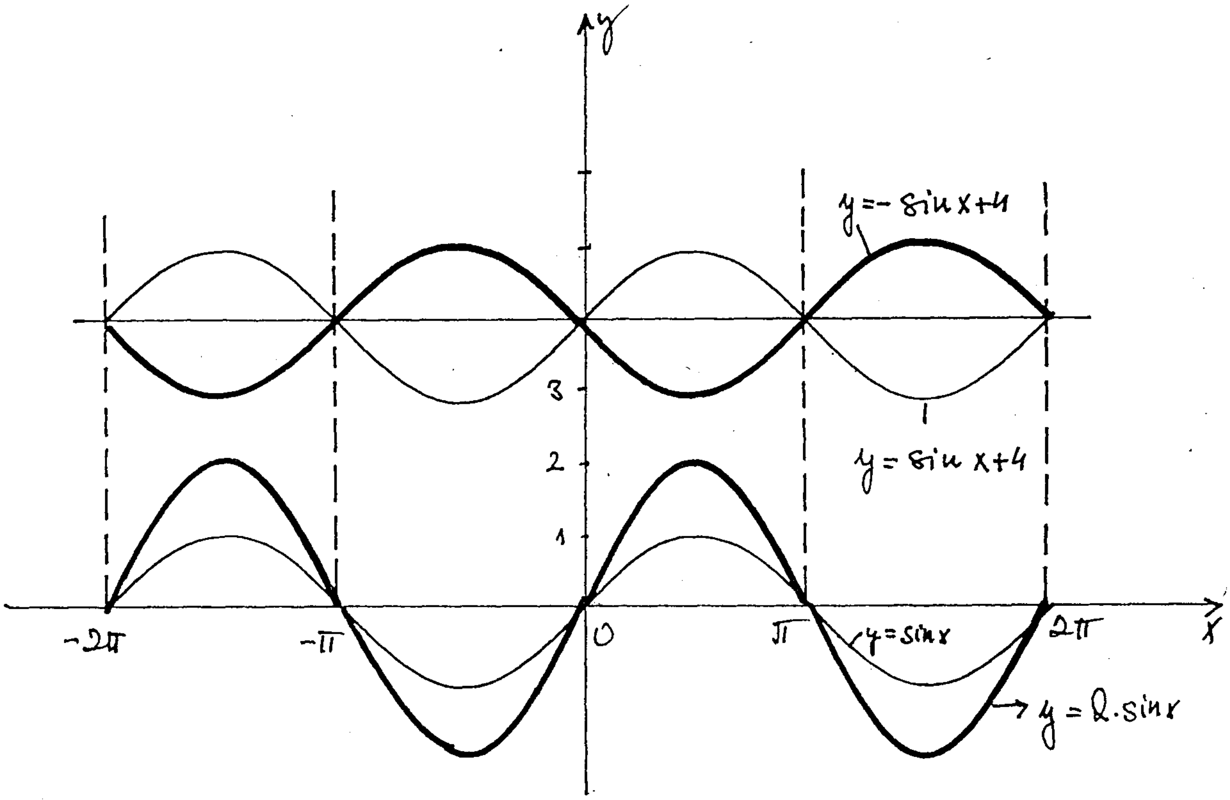


Poznámka: Obdobně lze sestrojit graf funkce $y = |\sin x|$.

Příklad 20: Podle následujícího obrázku posoudí, jak bylo při konstrukci grafů funkcí $y = \sin x$, $y = 2 \cdot \sin x$, $y = \sin x + 4$, $y = -\sin x + 4$ postupováno.

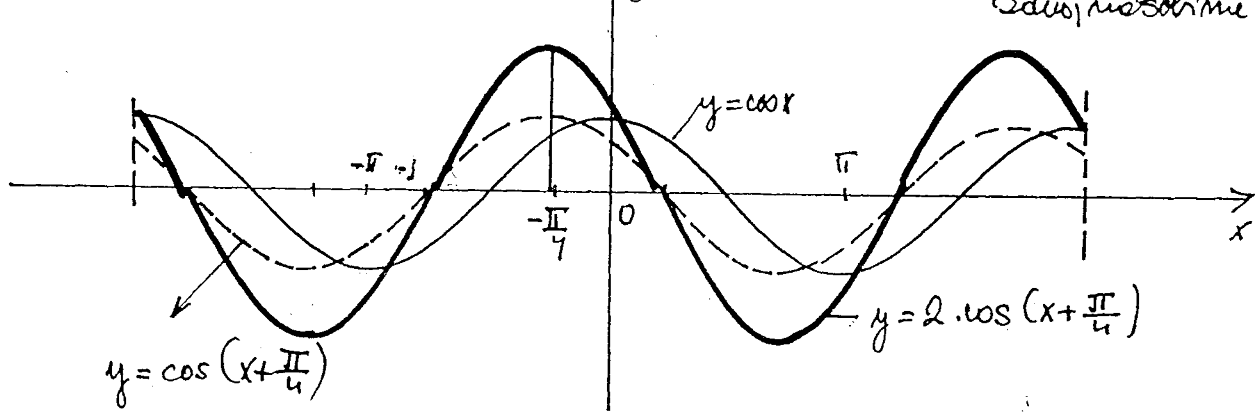
Pozor: $\underbrace{y = \sin x + 4}$ není totéž jako $y = \sin(x+4)$.

Zde to znamená, že graf funkce $y = \sin x$ se posune o 4 jednotky ve směru kladné poloosy y.

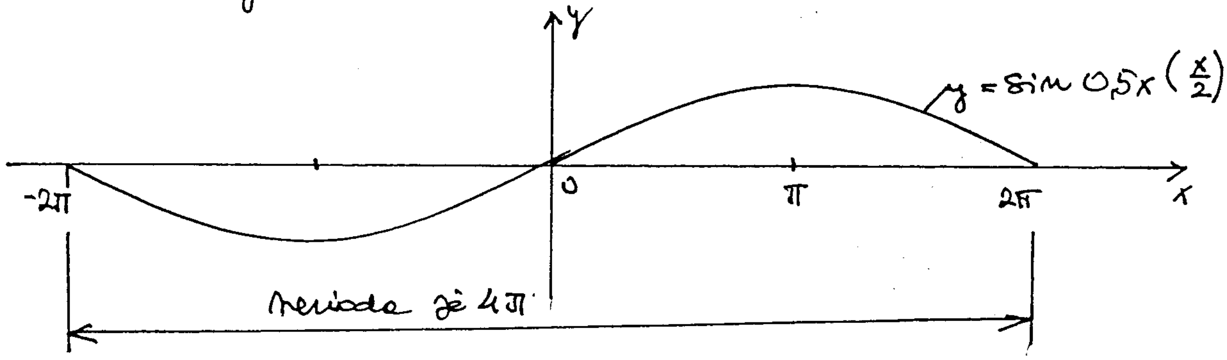


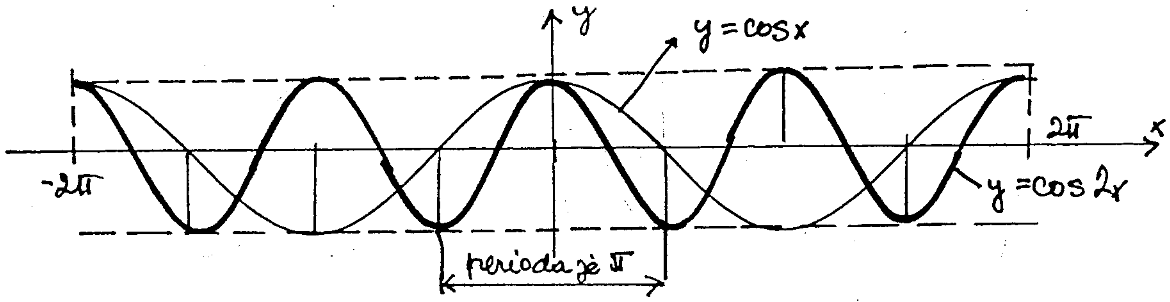
Příklad 21: Sestrojte graf funkce $y = 2 . \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

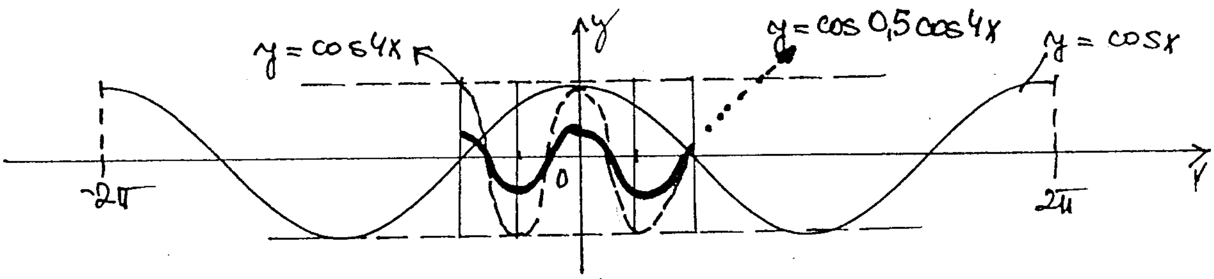
Postup: Hodnoty $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ zvětšíme 2krát. Sestrojíme proto graf funkce $y = \cos x$, ten posuneme o $-\frac{\pi}{4}$ směrem záporné poloosy a hodnoty $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ zdvojnásobíme.



Příklad 22: Načrtněte grafy funkcí: $y = \sin 0{,}5x$, $y = \cos 2x$, $y = 0{,}5 \cdot \cos 4x$ (v intervalu $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$)



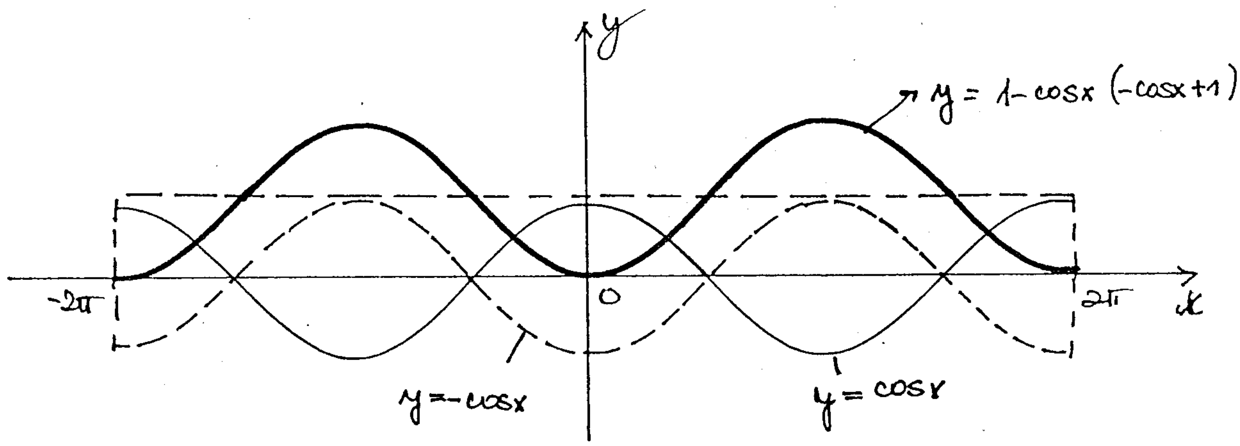




Graf funkce $y = 0{,}5 \cdot \cos 4x$ sestrojíme tak, že sestrojíme graf funkce $y = \cos 4x$ a každou získanou hodnotu dělíme 2.

Příklad 23: Sestrojte graf funkce $y = 1 - \cos x$

Platí $y = 1 - \cos x = -\cos x + 1$. Sestrojíme graf funkce $y = \cos x$, pak $y = -\cos x$ a ten posuneme o 1 ve směru kladné poloosy y.



	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	300°	315°	330°	360°	270°
	$0.\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	$\frac{3}{2}\pi$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*
cotg	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*	0

Kvadr.	sin	cos	tg	cotg
I.	+	+	+	+
II.	+	−	−	−
III.	−	−	+	+
IV.	−	+	−	−

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$

$tg\alpha \cdot cotg\alpha = 1$ $(tg\alpha \neq 0, cotg\alpha \neq 0)$

$1+cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$cotg\,\alpha = tg\,(90°-\alpha)$

pro kalkulačku

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

TABULKA HODNOT GON. FUNKCÍ a UZTAHY MEZI GON. FUNKCEMI

Vztahy mezi gon. funkcemi, je-li $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$tg\alpha \cdot cotg\alpha = 1$	$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Gon. funkce dvojnásobku a poloviny úhlu

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

$\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

$\boxed{tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

$\boxed{tg\,2\alpha = \frac{2}{cotg\alpha - tg\alpha}}$

Další vzorce:

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$

$\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(-x) = \cos x$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$-\cos x = \cos x$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$tg(-x) = -tg x$

$cotg(-x) = -cotg x$

$tg(x+m\pi) = tg x \mid cotg(x+m\pi) = cotg x$

$\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

Příklad 24: Vypočítejte:

a) $3\cdot\cos\frac{1}{4}\pi - 3\cdot\sin\frac{1}{4}\pi + 2\cdot\cos\frac{1}{3}\pi - \sin\frac{1}{6}\pi =$

$= \cancel{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\,(0,5)}$

b) $2\cdot\cos\frac{1}{2}\pi - 5\cdot\sin\pi + 6\cdot\cos\pi = 2\cdot0 - 5\cdot0 + 6\cdot(-1) = \boxed{-6}$

c) $-3\cdot\sin 0° + 7\cdot\cos 0° - 6\cdot\sin 270° = -3\cdot0 + 7\cdot1 - 6\cdot(-1) = 7+6 = \boxed{13}$

d) $\sin 3\pi = \sin(\cancel{2\pi}+\pi) = \sin\pi = \boxed{0}$

e) $\sin(-7\pi) = \sin(\cancel{-6\pi}-\pi) = \sin -\pi = -\sin\pi = -0 = \boxed{0}$

f) $\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\left(-2\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\cancel{2\pi}-\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\frac{1}{4}\pi = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

g) $\sin\frac{35}{6}\pi = \sin 5\frac{5}{6}\pi = \sin\left(\cancel{4\pi} + 1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin 1\frac{5}{6}\pi = \sin\frac{11}{6}\pi = \boxed{-\frac{1}{2}\,(-0,5)}$

h) $\cos\frac{39}{18}\pi = \cos\frac{13}{6}\pi = \cos\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\cancel{2\pi}+\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\frac{1}{6}\pi = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

i) $\cos(-720°) = \cos 720° = \cos 2\cdot360° = \cos 0° = \boxed{1}$

j) $\sin(-1845°) = \sin(\cancel{-6\cdot360°} + 315°) =$

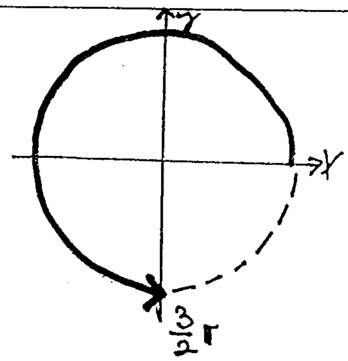
$= \sin 315° = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$-1845° : 360 = -5\ (-1)$

$-45°$

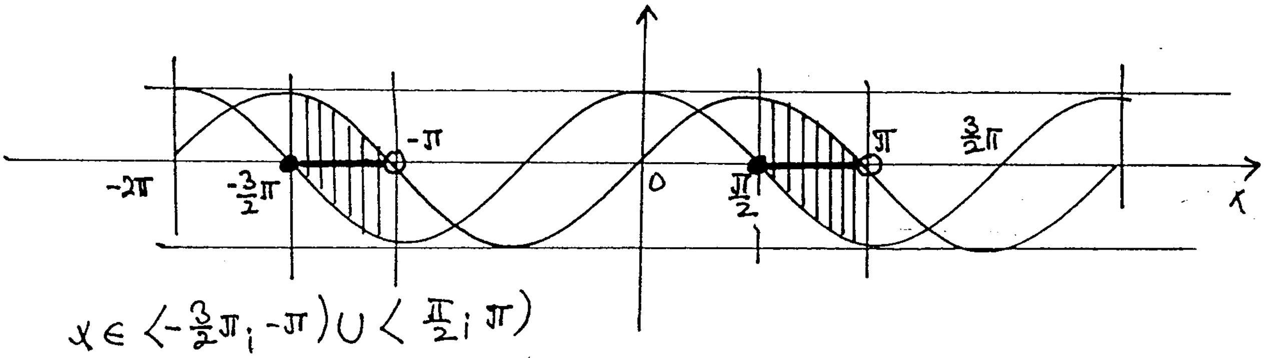
$360° - 45° = 315$

Příklad 25: Pomocí jednotkové kružnice zjistěte, zda existuje $x \in R$, pokud je $\cos x = 0 \wedge \sin x = -1$.



Ano, pro $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$, kde $k \in Z$

Příklad 26: Zapište množinu $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$, pro kterou platí: $\sin x > 0 \wedge \cos x \leqq 0$.



$x \in \langle -\frac{3}{2}\pi ; -\pi) \cup \langle \frac{\pi}{2} ; \pi)$

Příklad 27: Užitím vlastností sudé a liché funkce vypočítejte:
(Př. 9185 OA)
(jen část)

$\sin(-120°) = -\sin 120° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-135°) = \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

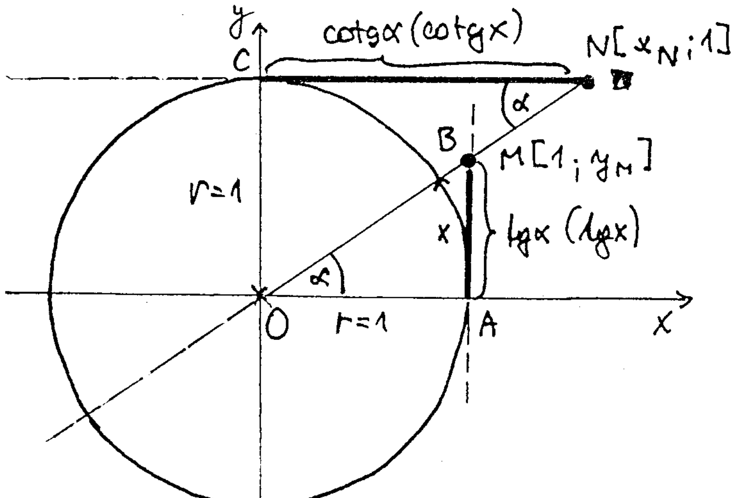
$\cos(-300°) = \cos 300° = \frac{1}{2}$

$\sin(-315°) = -\sin 315° = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

---

6. Goniometrické funkce tg x, cotg x (tg α, cotg α) definované pomocí orientovaného úhlu $\alpha = \measuredangle AVB$ v základní poloze (V = O [0;0] v počátku s.)

Definice jsou na str. 6 tohoto textu. K tomu příslušný obr.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{|AO|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|$

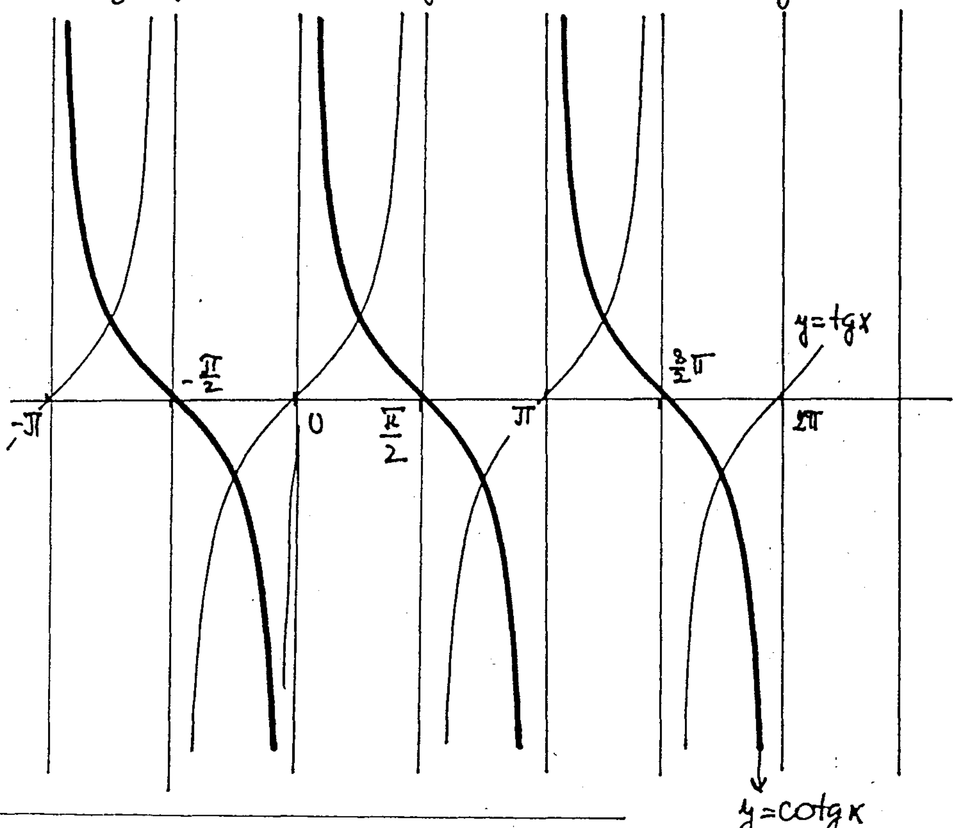
$\Rightarrow |AB| = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{|NC|}{|OC|} = \frac{|NC|}{1} = |NC|$

$\Rightarrow |NC| = \operatorname{cotg}\alpha$

Příklad 28: Do jediné soustavy souřadnic vyznačte grafy funkcí $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ v intervalu $\langle -\pi, 2\pi \rangle$.

Funkce $tg\,x$ a $cotg\,x$ jsou liché funkce. Platí věty:



$$\boxed{tg(x+m\pi) = tg\,x}$$

$$\boxed{cotg(x+m\pi) = cotg\,x}$$

kde $x \in D_f$ (obor funkce), $m \in Z$.

$$\boxed{tg(-x) = -tg\,x}$$

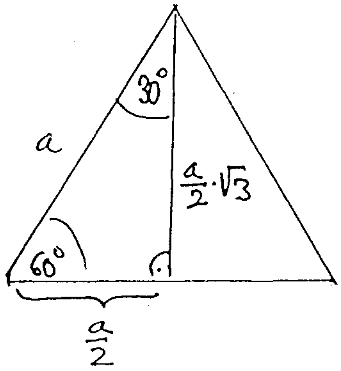
$$\boxed{cotg(-x) = -cotg\,x}$$

Příklad 20:

Vypočítejte:

$$tg\left(-\frac{19}{6}\pi\right) = tg -3\frac{1}{6}\pi = tg\left(\cancel{-3\pi} - \frac{1}{6}\pi\right) = tg -\frac{1}{6}\pi = -tg\frac{1}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pomocí rovnostranného Δ vypočítejte:



$$tg\,30°\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\,30°\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

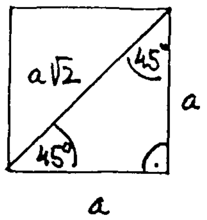
$$tg\,60° = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \dots 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$cotg\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 30°\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60°\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30°\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60°\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Pomocí pravoúhlého rovnoramenného Δ (nebo čtverce) vypočítejte:



$tg\, 45° \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{a} = 1$ $\qquad \sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cotg 45° = \frac{a}{a} = 1$ $\qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad 30: Určete hodnoty $tg x$ a $cotg x$ v bodech

$\boxed{x = \frac{7}{6}\pi}$ ... $tg \frac{7}{6}\pi = tg\, 1\frac{1}{6}\pi = tg(\cancel{\pi} + \frac{1}{6}\pi) = tg \frac{1}{6}\pi = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$cotg \frac{7}{6}\pi = cotg(\cancel{\pi} + \frac{1}{6}\pi) = cotg \frac{\pi}{6} = \boxed{\sqrt{3}}$

$\boxed{x = -\frac{21}{4}\pi}$ ... $tg -\frac{21}{4}\pi = tg\left(-5\frac{1}{4}\pi\right) = tg\left(\cancel{-5\pi} - \frac{1}{4}\pi\right) = tg -\frac{1}{4}\pi = -tg \frac{1}{4}\pi = \boxed{-1}$

$cotg -\frac{21}{4}\pi = cotg -\frac{1}{4}\pi = -cotg \frac{1}{4}\pi = \boxed{-1}$

$\boxed{x = 300°}$ ... $tg\, 300° = tg(\cancel{180°} + 120°) = tg\, 120° = -\sqrt{3}$

$cotg\, 300° = cotg(\cancel{180°} + 120°) = cotg\, 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Poznámka: lze též využít tabulku
hodnot gon. funkcí převodem do I. kvadrantu

FUNKCE	A: do $\frac{\pi}{2}$ / do $90°-\alpha$	B: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ / $90° \pm \alpha$	C: $\pi \pm \alpha$ / $180° \pm \alpha$	D: $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ / $270° \pm \alpha$	E: $2\pi - \alpha$ / $360° - \alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\varphi$	$-tg\,\alpha$	$\mp cotg\,\alpha$	$\pm tg\,\alpha$	$\mp cotg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
$cotg\,\varphi$	$-cotg\,\alpha$	$\mp tg\,\alpha$	$\pm cotg\,\alpha$	$\mp tg\,\alpha$	$-cotg\,\alpha$

$tg\, 300° = tg(\cancel{180°} + 120°) = tg\, 120° = tg(90° + 30°) = -cotg\, 30° = -\sqrt{3}$

Podle B

$\boxed{x = -945°}$ ... $tg -945° = tg\, 135° =$ $\qquad -945° : 180 = -5$

$-45°$

$= tg(90° + 45°) = -cotg\, 45° = \boxed{-1}$ $\qquad 180° - 45° = 135°$

$cotg -945° = cotg\, 135° = cotg(90° + 45°) = -tg\, 45° = \boxed{-1}$ NEBO další.

$$\mathrm{tg}(-945^\circ) = \mathrm{tg}(-5\cdot 180^\circ - 45^\circ) = \mathrm{tg}(-45^\circ) = -\mathrm{tg}\,45^\circ = \boxed{-1}$$

obdobně cotg

Příklad 31. Vypočítejte:

a)
$$\frac{\mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi - \mathrm{cotg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}{\mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi + \mathrm{cotg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{\mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi + \mathrm{cotg}\frac{2}{3}\pi}{\mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi - \mathrm{cotg}\frac{2}{3}\pi} = \frac{-\sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} =$$

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\cancel{3}}} = \frac{-4\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \boxed{2}$$

---

b)
$$\frac{\mathrm{cotg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{tg}\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}{\mathrm{tg}(-\pi) + \mathrm{cotg}\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{-\mathrm{cotg}\frac{2}{3}\pi - \mathrm{tg}\frac{1}{4}\pi}{-\mathrm{tg}\,\pi - \mathrm{cotg}\frac{1}{4}\pi} = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1}{-0-1} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{-1} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

---

7. Součtové a jiné vzorce. Pro každé $x, y \in R$ platí:

A

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

B

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y} \quad \text{pro } x, y \in D_f$$

Důkaz (příklad 33)

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}}{\frac{\cos x\cos y - \sin x\cdot\sin y}{\cos x\cos y}} = \frac{\frac{\sin x\,\cancel{\cos y}}{\cos x\,\cancel{\cos y}} + \frac{\cancel{\cos x}\,\sin y}{\cancel{\cos x}\cdot\cos y}}{\frac{\cancel{\cos x\cos y}}{\cancel{\cos x\cos y}} - \frac{\sin x\,\sin y}{\cos x\cos y}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}} = \boxed{\frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y}}$$

Příklad 34: Zjednodušte.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x-$

$-\left[\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x\right)=\cancel{\sin\frac{\pi}{4}\cos x}+\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\cancel{\sin\frac{\pi}{4}\cos x}+\right.$

$+\cos\frac{\pi}{4}\sin x=2\cos\frac{\pi}{4}\sin x=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\boxed{\sqrt{2}\cdot\sin x}$

---

b) $\sin(u+v)\cdot\cos v-\cos(u+v)\cdot\sin v=(\sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v)\cdot\cos v-$

$-(\cos u\cos v-\sin u\sin v)\cdot\sin v=\sin u\cos^2 v+\cancel{\sin v\cdot\cos u}\cdot\cos v-$

$-\cancel{\sin v\cdot\cos u\cdot\cos v}+\sin u\cdot\sin^2 v=\sin u\cos^2 v+\sin u\sin^2 v=\sin u(\cos^2 v+\sin^2 v)=$

$=\sin u\cdot 1=\boxed{\sin u}$

---

c) $\sin\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)=\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cdot\cos x+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cdot\sin x-\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cos x-\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\sin x\right)=$

$=\cos x+0-(\cos x-0)\ \cos x-\cos x=\boxed{0}$

---

d) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\cos x+\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}\cdot\sin x-\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos x-\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}\sin x\right)=$

$=\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos}+\frac{1}{2}\sin x-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}+\frac{1}{2}\sin x=\boxed{\sin x}$

Příklad 35: Řešte rovnici:

a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

$\cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\cos x$

$\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=\cos x$

$-\sin x=\cos x\quad\Big|\cdot\left(-\frac{1}{\cos x}\right)$

$\frac{\sin x}{\cos x}=-1$

$\operatorname{tg}x=-1$

$\boxed{x\in\frac{3}{4}\pi+k\pi,\ k\in Z}$

b) $\sin y=\sin 2y$

$\sin y=2\cdot\sin y\cos y\quad\Big|\ \frac{1}{\sin y}$

$1=2\cdot\cos y$

$\cos y=\frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l}y_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ y_2=\frac{5}{3}\pi+2k\pi\end{array}}$$

Poznámka: Goniometrické rovnice je samostatné maturitní téma.

Příklad 36: Vyjádřete ve tvaru součinu

a) $\sin \frac{1}{12}\pi - \sin \frac{1}{18}\pi =$ (Využijeme vzorce označené A)

$$= 2\cdot\cos \frac{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{18}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{18}}{2} = 2\cdot\cos \frac{\frac{3\pi+2\pi}{36}}{\frac{2}{1}} \cdot \sin \frac{\frac{3\pi-2\pi}{36}}{\frac{2}{1}} =$$

$$= 2\cos \frac{\frac{5\pi}{36}}{\frac{2}{1}} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{36}}{\frac{2}{1}} = \boxed{2\cdot\cos \frac{5\pi}{72} \cdot \sin \frac{\pi}{72}}$$, což je součin

b) $$\cos 3x - \cos x = -2\sin \frac{3x+x}{2} \cdot \sin \frac{3x-x}{2} = -2\sin \frac{4x}{2} \cdot \sin \frac{2x}{2} =$$

$$= \boxed{-2 \sin 2x \cdot \sin x}$$

c) $$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+x}{2} =$$

$$= 2\cdot\sin \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{1}} \cdot \cos \frac{2x}{2} = 2 \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \boxed{\sqrt{2}\cdot\cos x}$$

Příklad 37: Bez použití kalkulačky vypočítejte:

a) $$\sin 105° = \sin(60°+45°) = \underbrace{\sin 60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\sin 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

b) $$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \underbrace{\cos 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{\sin 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\sin 30°}_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad \ldots 0{,}965\ldots$$

c) $$\sin 165° = \sin(225°-60°) = \underbrace{\sin 225°}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\cos 225°}_{} \cdot \sin 60° \quad + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}} = \boxed{\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

d) $$\cos 165° = \cos(225°-60°) = \underbrace{\cos 225°}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\sin 225°}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\sin 60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$\operatorname{tg} 165° = \frac{\sin 165°}{\cos 165°} = \frac{-\frac{\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt6}{4}}{-\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6}{4}} = \frac{\frac{-\sqrt2+\sqrt6}{\cancel{4}}}{\frac{-\sqrt2-\sqrt6}{\cancel{4}}} = \frac{\sqrt6-\sqrt2}{-\sqrt6-\sqrt2} =$$

$$= \frac{-(\sqrt2-\sqrt6)}{-(\sqrt2+\sqrt6)} = \boxed{\frac{\sqrt2-\sqrt6}{\sqrt2+\sqrt6}}$$

$$\operatorname{cotg} 165° = \frac{1}{\operatorname{tg} 165°} = \boxed{\frac{\sqrt2+\sqrt6}{\sqrt2-\sqrt6}}$$

Pro každé $x \in R$ platí:

$$\boxed{\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x} \quad C$$

$$\boxed{\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} \quad D$$

Příklad 38: Vypočítejte:

a) $\cos 3x$ vyjádřete pomocí $\cos x$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \underbrace{\cos 2x}_{\text{vzorce } C} \cdot \cos x - \underbrace{\sin 2x}_{} \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x -$$

$$- 2 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 \cos x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x) \cdot \cos x = \cos^3 x - 3\cos x\,(1-\cos^2 x) = \cos^3 x - 3\cos x +$$

$$+ 3\cos^3 x = \boxed{4 \cdot \cos^3 x - 3\cos x}$$

Příklad 39: Vypočítejte $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, je-li $\sin x = \frac{1}{3} \wedge \cos x < 0$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2$$

$$\cos^2 x = 1 - \tfrac{1}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt2}{3}$, protože $\cos x < 0$,

tak vezmeme jen $\boxed{\cos x = -\frac{2\sqrt2}{3}}$

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cos x = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \boxed{-\frac{4\sqrt{2}}{9} = \sin 2x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4\cdot 2}{9} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{7}{9} = \cos 2x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = \boxed{-\frac{4\sqrt{2}}{7} = \operatorname{tg} 2x}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3+2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{1}}} = \boxed{\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}} = \sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{\frac{3-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{1}}} =$$

$$\boxed{\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}}{\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}} = \sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})^2}{9-4\cdot 2}} =$$

$$= \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = \boxed{3+2\sqrt{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

Příklad 40: Zjednodušte:

a) $$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\cos^2 x - \sin^2 x}{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1+\cos^2 x - (1-\cos^2 x)}{1-\cos^2 x + \underbrace{\sin^2 x}} = \frac{\cancel{1}+\cos^2 x - \cancel{1} + \cos^2 x}{1-\cos^2 x + \underbrace{1-\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{2\cdot\cos^2 x}{2-2\cos^2 x} = \frac{\cancel{2}\cdot\cos^2 x}{\cancel{2}(1-\cos^2 x)} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \boxed{\operatorname{cotg}^2 x} \quad (\sin x \neq 0,\ x \neq k\pi)$$

---

b) $$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1}} = \frac{\frac{\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x}}{\cos^2 x}}{\frac{\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x}}{1}} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} \quad \left(\cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$

Příklad 41: Vypočítejte $\sin 120°$ pomocí sinu dvojnásobku úhlu.

$$\sin 120° = \sin(2\cdot 60°) = 2\cdot\sin 60°\cdot\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Příklad 42: Vypočítejte $\sin 2\alpha$ a $\cos 2\alpha$, a $\operatorname{cotg} 2\alpha$, je-li $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, α je ve 2. kvadrantu.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\cos\alpha$ je ve 2. kvadr., kde $\cos\alpha < 0$, $\boxed{\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}}$

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \boxed{-\frac{3\sqrt{7}}{8} = \sin 2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{2}{16} = \boxed{-\frac{1}{8} = \cos 2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{8.1}{8.3\sqrt{7}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{1.\sqrt{7}}{3.\sqrt{7}.\sqrt{7}} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{21} = \operatorname{cotg} 2\alpha}$$

Příklad 43: Zjednodušte (OA Vlašim):

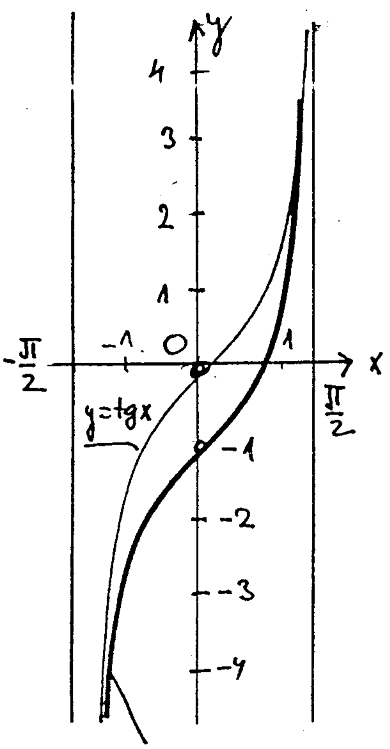
$$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} =$$

$$\frac{\overbrace{1-\cos^2\alpha}^{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha}{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{\underbrace{(1-\sin^2\alpha)}_{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha} = \frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha} \rightarrow$$

$$\frac{4\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\underbrace{2\cdot\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\cos^2\alpha}_{\text{společný jmenovatel}}} = \frac{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\cdot\sin\alpha\cos^3\alpha} = \frac{2\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{\operatorname{tg}\alpha}$$

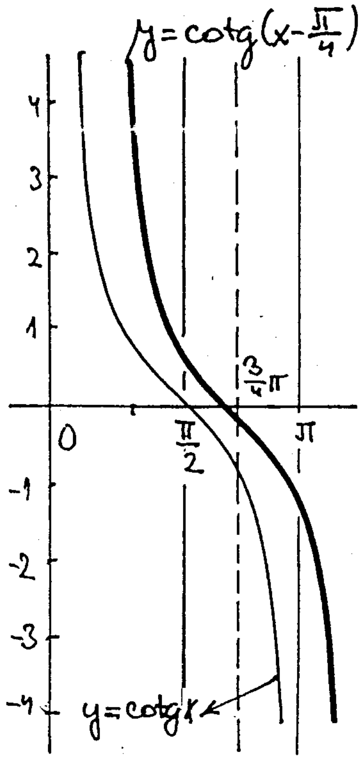
Příklad 44: Načrtněte grafy funkcí (intervaly zvolte):

a) $y = \operatorname{tg}x - 1$ b) $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $y = -|\operatorname{tg}x|$

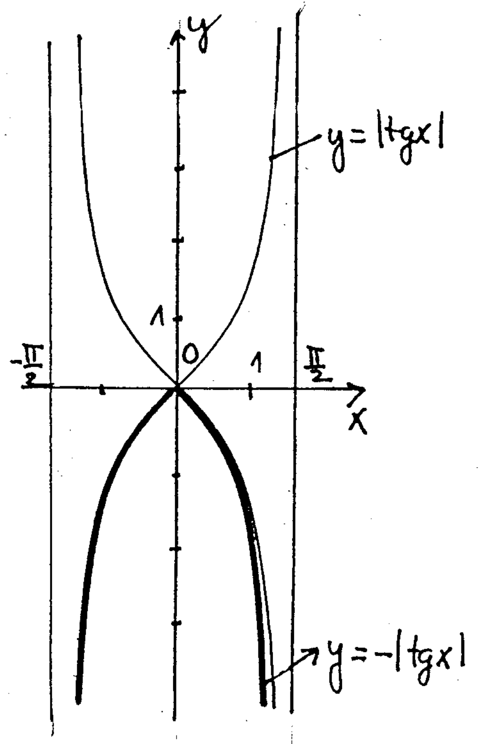


$y = tgx - 1$

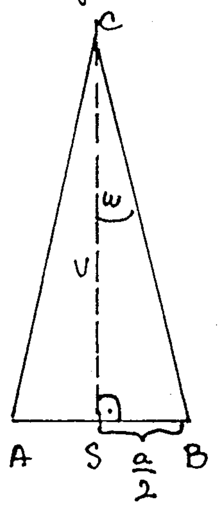
graf funkce $y = tgx$ posuneme o 1 ve směru záporné poloosy y.



graf funkce $y = cotgx$ posuneme o $\frac{\pi}{4}$ ve směru kladné poloosy x.



Závěrečný příklad 45: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu pravidelného desetiúhelníku, je-li dána délka $\underline{a}$ jeho strany:



$|AB| = a$, $|BS| = \frac{a}{2}$, $\omega = 360° : 20 = 18°$

$$\text{cotg}\,\omega = \frac{v}{\frac{a}{2}} \qquad S_{10} = 10 \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$\text{cotg}\,18° = \frac{2v}{a} \qquad S_{10} = 10 \cdot \frac{a \cdot v}{2}$$

$$2v = a \cdot \text{cotg}\,18° \qquad S_{10} = 5av \doteq 5a \cdot \frac{a \cdot \text{cotg}\,18}{2}$$

$$v = \frac{a \cdot \text{cotg}\,18°}{2} \qquad \boxed{S_{10} = \frac{5}{2}\, a^2 \cdot \text{cotg}\,18°}\text{, např.}$$

pro $a = 5\,cm$ je $S_{10} = \frac{5}{2} \cdot 25 \cdot 3{,}077683537 \doteq 192{,}36\,(cm^2)$ $\doteq 1{,}9\,dm^2$.
