Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty řešené v r. 2008

Př. 3.11a/93 nové uč. M pro G: Odmocníme C přesně:

$$x^2 + 3x + 10i = 0 \qquad D = b^2 - 4ac$$

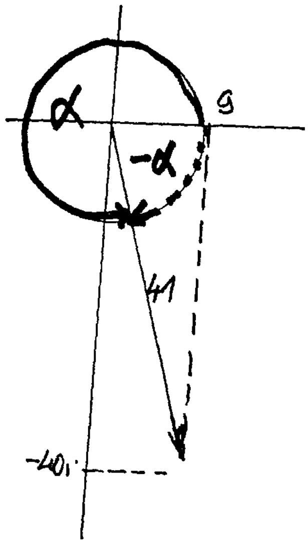
$a=1 \quad b=3 \quad c=10$

$$D = 9 - 40i$$

$$|D| = \sqrt{81+1600} = \sqrt{1681} = 41$$

$$D = 41\cdot\left(\frac{9}{41} - \frac{40}{41}i\right)$$

$\frac{9}{41} \to \cos\alpha \qquad \frac{40}{41} \to \sin\alpha$



$$\left|\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right| = \sqrt{\frac{1+\frac{9}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{50}{41}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{50}{82}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{82}} = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\left|\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right| = \sqrt{\frac{1-\frac{9}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{41}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{32}{82}} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{82}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

α je argument diskriminantu D. Použijeme-li vzorec $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, pak můžeme psát ... $\sin(-\frac{1}{2}\alpha) = -\frac{4}{\sqrt{41}}$ (s ohledem na imaginární složku $-40i$ diskriminantu):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\cdot(\cos\frac{1}{2}\alpha + i\sin\frac{1}{2}\alpha)}{2a} \quad \text{...VZOREC}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{41}} - \frac{4}{\sqrt{41}}i\right)}{2} = \frac{-3 \pm (5-4i)}{2} = \begin{cases} \frac{-3+5-4i}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i \\ \frac{-3-5+4i}{2} = \frac{-8+4i}{2} = -4+2i \end{cases}$$

Rovnice má řešení: $\boxed{x_1 = 1-2i,\ x_2 = -4+2i}$; ověříme zkouškou:

Pro x_1: $L = (1-2i)^2 + 3(1-2i) + 10i = 1 - 4i - 4 + 3 - 6i + 10i = 0 + 0i = 0$

$P = 0$; $L = P$

Pro x_2: $L = (-4+2i)^2 + 3\cdot(-4+2i) + 10i = 16 - 16i - 4 - 12 + 6i + 10i = 0$

$P = 0$; $L = P$ **2. POSTUP pro výpočet $\cos\alpha, \sin\alpha$ je na str. 5.**

Př. 3.11b/93 nové učebnice M pro G. **1. POSTUP:**

$$x^2 - 2x + 9 + 6i = 0$$

2. POSTUP JE NA STR. 5

$a=1 \quad b=-2, \quad c = 9+6i$

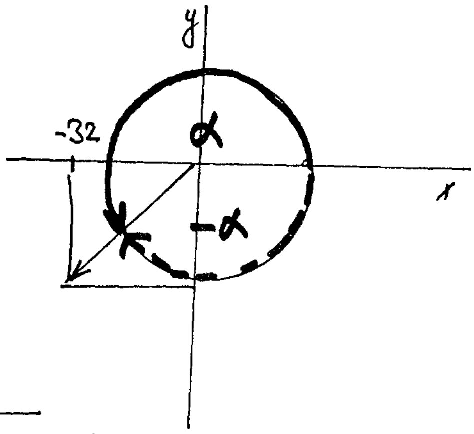
$D=(-2)^2-4\cdot(9+6i)=4-36-24i$ ... $D=-32-24i$ → Opět je záporné!

$|D|=\sqrt{32^2+24^2}=\sqrt{1600}=40$

$D=40\cdot\left(-\frac{32}{40}-\frac{24}{40}i\right)$

$D=40\cdot\left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)$

$\cos\alpha \qquad \sin\alpha$



$|\cos\frac{1}{2}\alpha|=\sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{1}}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$|\sin\frac{1}{2}\alpha|=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{2}{1}}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ ... opět $\sin(-\frac{1}{2}\alpha)=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{40}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-i\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}{2}=\frac{2\pm(\sqrt{4}-i\,3\sqrt{4})}{2}=\frac{2\pm(2-6i)}{2}$$

$$x_1=\frac{2+2-6i}{2}=\frac{4-6i}{2}=\boxed{2-3i}$$

$$x_2=\frac{2-2+6i}{2}=\frac{6i}{2}=\boxed{3i}$$

je správné řešení, lze si ověřit zkouškou

Př. z minulého zdroje: Řešte rovnici $x^2-4=3i$

1. POSTUP

$x^2-4=3i$

$x^2=4+3i$

Položme $x=a+bi$

$(a+bi)^2=4+3i$

$a^2+2abi-b^2=4+3i$

$a^2-b^2+2abi=4+3i$

→ $a^2-b^2=4$

$2ab=3$

$b=\frac{3}{2a}$

$a^2-\left(\frac{3}{2a}\right)^2-4=0$

$a^2-\frac{9}{4a^2}-4=0 \quad |\cdot 4a^2$

$4a^4-9-16a^2=0$

→ $4a^4-16a^2-9=0$

Substituce: $a^2=y$

$4y^2-16y-9=0$

$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256+144}}{8}$

$y_{1,2}=\frac{16\pm20}{8}$ ↗ $y_1=\frac{9}{2}$ ↘ $y_2=-\frac{1}{2}$

Viz další strana.

$y_2 = -\frac{1}{2}$ nevyhovuje, neboť $\underline{a}^2$ se nemůže rovnat záporném číslu.

Pro $y_1 = \frac{9}{2}$ je $a^2 = \frac{9}{2}$

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ a_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Je-li $a_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, pak $b_1 = \dfrac{3}{2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x_1 = a_1 + b_1 i$ ... $\boxed{x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}}$

Je-li $a_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$, pak $b_2 = \dfrac{3}{2(-\frac{3}{2}\sqrt{2})} = \dfrac{3}{-3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x_2 = a_2 + b_2 i$ ... $\boxed{x_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}}$ Řešením jsou dvě komplexní čísla ~~sdružená~~! Proveďme zkoušku aspoň pro x_1:

$L = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4}\cdot 2 + \frac{3}{4}\cdot(\sqrt{2})^2 i + \frac{1}{4}(i)^2\cdot(\sqrt{2})^2 - 4 =$

$= \frac{9}{2} + 2\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\cdot i + \frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot 2 - 4 = \frac{9}{2} + 3i - \frac{1}{2} - 4 = 3i$

$P = 3i$ ... $L = P$

---

2. POSTUP $\quad D = b^2 - 4ac = 0 - 4\cdot 1(-4-3i) = 16 + 12i$

$x^2 - 4 = 3i$ $\qquad |D| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$

$\underset{a=1}{x^2} + \underset{b=0}{0x} \underbrace{-4-3i}_{c} = 0$ $\qquad D = 20\cdot\left(\frac{16}{20} + \frac{12}{20}i\right) = 20\cdot\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)$, $\cos = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$$\left|\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right| = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\left|\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right| = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{20}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}i\right)}{2} = \frac{\pm(\sqrt{2}\cdot 3 + \sqrt{2}\,i)}{2} = \begin{cases} \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}} \\ \boxed{-\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}} \end{cases}$$

Př. z neznámého zdroje: Řešte rovnici: $z^2=-16+30i$

1. POSTUP:

$z^2=-16+30i$

Položme: $x=a+bi$

$(a+bi)^2=-16+30i$

$a^2+2abi-b^2=-16+30i$

$a^2-b^2+2abi=-16+30i$

$a^2-b^2=-16$

$2ab=30$

$b=\frac{30}{2a}=\frac{15}{a}$

$a^2-\left(\frac{15}{a}\right)^2=-16$

$a^2-\frac{225}{a^2}+16=0 \quad / \cdot a^2$

$a^4-225+16a^2=0$

Substituce $a^2=y$

$y^2+16y-225=0$

$y_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{256+900}}{2}$

$y_{1,2}=\frac{-16\pm 34}{2}=\begin{cases} 9=y_1 \\ -25=y_2 \end{cases}$

nevyhovuje

neboť a^2 není záporné číslo

Pro $y_1=9$ je $a^2=9$

$a_{1,2}=\pm 3$

Je-li $a_1=3$, pak $b_1=\frac{15}{3}=5$

Je-li $a_2=-3$, pak $b_2=\frac{15}{-3}=-5$

$x_1=a_1+b_1 i \ldots \boxed{x_1=z_1=3+5i}$

$x_2=a_2+b_2 i \ldots \boxed{x_2=z_2=-3-5i}$

2. POSTUP:

$z^2=-16+30i \qquad D=0^2-4(16-30i)$

$z^2+16-30i=0 \qquad D=-64+120i$

$z^2+0z+16-30i=0 \qquad |D|=\sqrt{64^2+120^2}=136$

$a=1 \quad b=0 \quad c=16-30i$

$D=136\cdot\left(-\frac{64}{136}+\frac{120}{136}i\right)$

$D=136\cdot\left(\underbrace{-\frac{8}{17}}_{\cos\alpha}+\underbrace{\frac{15}{17}}_{\sin\alpha}i\right)$

$\left|\cos\frac{1}{2}\alpha\right|=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{8}{17}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{9}{17}}{\frac{2}{1}}}=\sqrt{\frac{9}{34}}=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\left|\sin\frac{1}{2}\alpha\right|=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{8}{17}\right)}{\frac{2}{1}}}=\sqrt{\frac{\frac{25}{17}}{\frac{2}{1}}}=\sqrt{\frac{25}{34}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{136}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{34}}+\frac{5}{\sqrt{34}}i\right)}{2}$

$x_{1,2}=\frac{\pm\frac{\sqrt{136}}{\sqrt{34}}\cdot 3+\frac{\sqrt{136}}{\sqrt{34}}\cdot 5i}{2}$

$x_{1,2}=\frac{\pm(2\cdot 3+2\cdot 5i)}{2}=\frac{\pm 6+10i}{2}$

$\boxed{x_1=3+5i=z_1 \qquad x_2=-3-5i=z_2}$

Část zkoušky (pro $x_1(z_1)$)

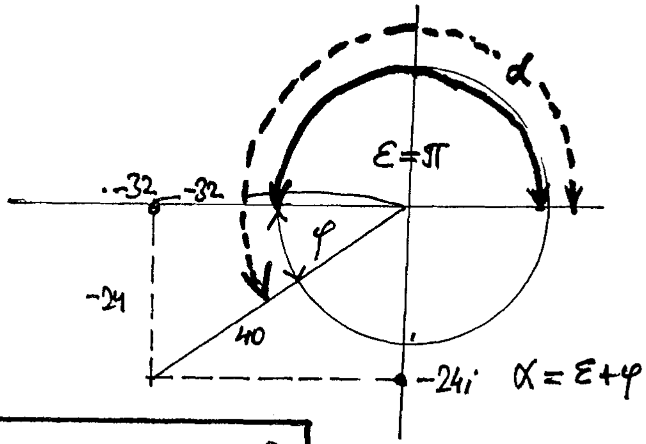
$L=(3+5i)^2=9+30i-25=-16+30i$

$P=-16+30i \quad \ldots L=P$

Př. 3.11b/93 z nové učebnice M pro G · 2. POSTUP

$$x^2-2x+\underbrace{9+6i}_{c}=0$$

$a=1$, b, c



$D=(-2)^2-4\cdot(9+6i)=4-36-24i$

$|D|=\sqrt{32^2+24^2}=\sqrt{1600}=40$

Výpočet $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$, kde $\alpha=\varepsilon+\varphi$ (viz obr.)

VZORCE

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	I
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	II

Pro $\cos\alpha=\cos(\varepsilon+\varphi)$ podle vzorce I platí:

$\cos(\varepsilon+\varphi)=\cos\varepsilon\cos\varphi-\sin\varepsilon\sin\varphi$

$\cos\alpha=\cos\pi\cdot\frac{32}{40}-\sin\pi\cdot\frac{24}{40}=-1\cdot\frac{4}{5}-0\cdot\frac{24}{40}=-\frac{4}{5}\;\ldots\;\boxed{\cos\alpha=-\frac{4}{5}}$

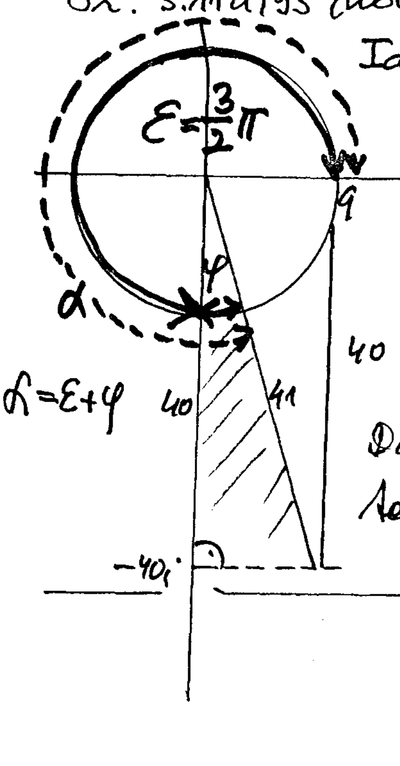
Pro $\sin\alpha=\sin(\varepsilon+\varphi)$ podle vzorce II platí:

$\sin\alpha=\sin\varepsilon\cdot\cos\varphi+\cos\varepsilon\cdot\sin\varphi=\sin\pi\cdot\frac{32}{40}+\cos\pi\cdot\frac{24}{40}=$

$=0\cdot\frac{32}{40}+(-1)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}\;\ldots\;\boxed{\sin\alpha=-\frac{3}{5}}$

Dále podle vzoru na str. 2 vypočítáme $|\cos\frac{1}{2}\alpha|$, $|\sin\frac{1}{2}\alpha|$ a $x_{1,2}$ ... opět vyjde $x_1=2-3i$, $x_2=3i$.

Př. 3.11a/93 nové uč. M pro G. Znázorníme výpočet podle vzorců I a II, viz níže.



$\cos\alpha=\cos\varepsilon\cos\varphi-\sin\varepsilon\sin\varphi=\cos\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{40}{41}-\sin\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{9}{41}=$

$=0\cdot\frac{40}{41}-(-1)\cdot\frac{9}{41}=\frac{9}{41}\;\ldots\;\boxed{\cos\alpha=\frac{9}{41}}$

$\sin\alpha=\sin\varepsilon\cos\varphi+\cos\varepsilon\sin\varphi=\sin\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{40}{41}+\cos\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{9}{41}=$

$=(-1)\cdot\frac{40}{41}+0\cdot\frac{9}{41}=-\frac{40}{41}\;\ldots\;\boxed{\sin\alpha=-\frac{40}{41}}$

Dále pokračujeme podle vzoru na str. 1, vypočítáme $|\cos\frac{1}{2}\alpha|$, $|\sin\frac{1}{2}\alpha|$ a $x_1=1-2i$, $x_2=-4+2i$

Př. 15.1 nash. 137 ze (~~staré př. M pro G.~~) ze sbírky J. Bušky

Řešte v množině C:

$3z^2+4z+2=0$ $\qquad D=b^2-4ac=16-4.3.2=16-24=-8$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm i\sqrt{8}}{6}=\frac{-4\pm 2i\sqrt{2}}{6}=-\frac{4}{6}\pm\frac{i\sqrt{2}}{3}=-\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{2}\,i$$

$$\boxed{z_1=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i\sqrt{2}} \quad \boxed{z_2=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\sqrt{2}}$$

Zkouška aspoň pro z_1:

$$L=3.\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{2}\right)^2+4.\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{2}\right)+2=3.\left[\frac{4}{9}-\frac{4}{9}i\sqrt{2}+\frac{1}{9}\cdot(-1)\cdot 2\right]-\frac{8}{3}+$$

$$+\frac{4}{3}i\sqrt{2}+2=3.\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{9}i\sqrt{2}-\frac{2}{9}\right)-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{2}=3\cdot\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{9}i\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}+$$

$$+\frac{4}{3}i\sqrt{2}=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i\sqrt{2}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i\sqrt{2}=0+0i=0\ ;\ P=0\ ;\ L=P$$

Poznámka: Uvedený příklad naznačuje, že řešení kvadratické rovnice v C lze uplatnit i jen u rovnic s reálnými koeficienty $(a,b,c\in R)$.

Př. 15.7/144 ze sbírky Ivana Buška

$5z^2+13z+9=0$ $\qquad D=13^2-180=-11$

$$z_{1,2}=\frac{-13\pm i\sqrt{11}}{10}=\begin{cases}\boxed{-\frac{13}{10}+\frac{1}{10}i\sqrt{11}}\\ \boxed{-\frac{13}{10}-\frac{1}{10}i\sqrt{11}}\end{cases}\text{ nebo } -\frac{13}{10}\pm\frac{\sqrt{11}}{10}i$$

Př. 15.10 b/145 ze sbírky Ivana Buška: V množině C řešte rovnici:

$$\underbrace{z^2}_{a=1}+\underbrace{2z}_{b=2}+\underbrace{2i+1}_{c}=0$$

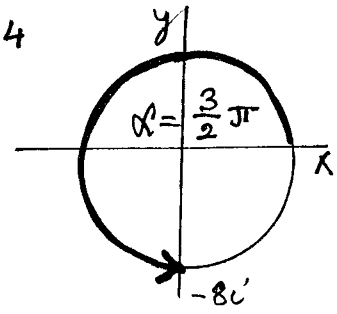
$D=4-4.(2i+1)=4-8i-4$

$D=-8i \qquad |D|=8$

$D=8\cdot\left(\frac{0}{8}-\frac{8}{8}i\right)$

$D=8\cdot(0-1i)$

$\cos\frac{3}{2}\pi=0 \qquad \sin\frac{3}{2}\pi=-1$



Vzhledem ke ⊖ znaménku ve vzorci $z_{1,2}$ psát u imag. složky minus.

$$\left|\cos\frac{1}{2}\alpha\right|=\sqrt{\frac{1+0}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left|\sin\frac{1}{2}\alpha\right|=\sqrt{\frac{1-0}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \left(\frac{2\cdot(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{2\cdot(\sqrt{2})^2}{2} i\right)}{2} = \frac{-2 \pm \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{2} i\right)}{2} = \frac{-2 \pm (2-2i)}{2}$$

$$= \frac{-2+2-2i}{2} = \frac{-2i}{2} = \boxed{-i} = z_1$$

$$\frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = \boxed{-2+i} = z_2$$

Zkouška pro z_1: $L = (-i)^2 + 2\cdot(-i) + 2i + 1 = -1 - 2i + 2i + 1 = 0$

$P = 0$; $L = P$

Zkouška pro z_2: $L = (-2+i)^2 + 2(-2+i) + 2i + 1 = 4 - 4i - 1 - 4 + 2i + 2i + 1 = 0$

$P = 0$; $L = P$

Příklad ze zkoušek na vysoké školy:

Určete kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, víte-li, že jedním kořenem této rovnice je komplexní číslo

a) $x_1 = 2 - i$ b) $x_1 = 1 - i$ c) $x_1 = 3 - i$ d) $x_1 = 5 - i$

Úvodní poznámka: Kořeny v těchto typech úloh jsou vždy dvojice čísel komplexně sdružených.

Řešení a) $x_1 = 2 - i \Rightarrow x_2 = 2 + i$

$[x - (2-i)]\cdot[x - (2+i)] = 0$

$(x - 2 + i)\cdot(x - 2 - i) = 0$

$[(x-2) + i]\cdot[(x-2) - i] = 0$

Použijeme pomocí vzorce

$(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$

$(x-2)^2 - i^2 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + 1 = 0$

$\boxed{x^2 - 4x + 5 = 0}$

Řešení b) $x_2 = 1 + i$

$[x - (1-i)]\cdot[x - (1+i)] = 0$

$(x - 1 + i)\cdot(x - 1 - i) = 0$

$[(x-1) + i]\cdot[(x-1) - i] =$

$(x-1)^2 - i^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + 1 = 0$

$\boxed{x^2 - 2x + 2 = 0}$

Řešení c) $x_2 = 3+i$

$$[x-(3-i)]\cdot[x-(3+i)]=0$$

$$(x-3+i)\cdot(x-3-i)=0$$

$$[(x-3)+i]\cdot[(x-3)-i]=0$$

$$(x-3)^2-i^2=0$$

$$x^2-6x+9+1=0$$

$$\boxed{x^2-6x+10=0}$$

Řešení d) $x_2 = 5+i$

$$[x-(5-i)]\cdot[x-(5+i)]=0$$

$$(x-5+i)\cdot(x-5-i)=0$$

$$[(x-5)+i]\cdot[(x-5)-i]=0$$

$$(x-5)^2-i^2=0$$

$$x^2-10x+25+1=0$$

$$\boxed{x^2-10x+26=0}$$

Příklad ze zkoušek pro vysoké školy:

Kvadratické rovnice s reálným parametrem m mají tvar

a) $x^2+2x+m^2+3m+2=0$ b) $x^2-6x+m^2-5m+4=0$;

pro dvě hodnoty parametru m_1 a m_2 určete součin $m_1 \cdot m_2$.

Řešení a) $x^2+2x+\underline{m^2+3m+2}=0$. Tato rovnice má tvar

$$x^2+px+q=0$$

Platí pro ni proto vztahy $x_1+x_2=p$ a $x_1\cdot x_2=q$. Podle podmínek úlohy lze psát:

$x_1+x_2=-2 \wedge x_1=0 \Rightarrow x_2=-2$

Dále platí $x_1\cdot x_2=0\cdot(-2)=0 \Rightarrow q=\ldots m^2+3m+2=0$ $(x^2+p^x x+q^x=0)$

$$m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}= \begin{cases} m_1=-1 \\ m_2=-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow m^2+3m+2=(m+2)\cdot(m+1)=0$

$\Rightarrow m+2=0 \vee m+1=0$

$m_1=-2$ $m=-1$. Hledaný součin $\boxed{m_1\cdot m_2=2}$

Ověření správnosti: $m_1+m_2=-2+(-1)=-3$ $(-p^x)$

$m_1\cdot m_2=-2\cdot(-1)=2$ (q^x)

Pro $m_1=-1$ má rovnice tvar: $x^2+2x+(-1)^2+3(-1)+2=0$

$$x^2+2x=0$$

$$x(x+2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2$$

Pro $m_2=-2$ má rovnice tvar: $x^2+2x+(-2)^2+3\cdot(-2)+2=0$

$x^2+2x=0$ a řešení $x_1=0, x_2=-2$

Řešení b): $x^2-6x+\underbrace{m^2-5m+4}=0$ $\qquad x_1+x_2=6 \wedge x_1=0 \Rightarrow x_2=6$

$$x^2+px+\quad q\quad=0 \qquad p^* \quad q^*$$

Odtud platí: $x_1\cdot x_2=0.6=0 \ldots m^2-5m+4=0$

$$m_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases} m_1=4 \\ m_2=1\end{cases} \Rightarrow$$

$m^2-6m+m^2=(m-4)\cdot(m-1)=0 \Rightarrow$

$m_1-4=0 \quad \vee \quad m_2-1=0$

$m_1=4 \qquad m_2=1$ Hledaný součin je $\boxed{m_1\cdot m_2=4}$

Ověření správnosti: $m_1+m_2=4+1=5\ (-p^*)$

$$m_1\cdot m_2=4\cdot1=4\ (q^*)$$

Pro $m_1=4$ má daná rovnice tvar $x^2-6x+4^2-5\cdot4+4=0$

$$x^2-6x=0$$

$$x(x-6)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=6$$

Pro $m_2=1$ " " " " $x^2-6x+1^2-5\cdot1+4=0$

$$x^2-6x=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=6$$

Příklad se objevil na vysoké škole.
Rovnice $mx^2+x+m=0$, kde $\underline{x}$ je reálná proměnná a $\underline{m}$ je reálný parametr má dva reálné kořeny různé pro všechny hodnoty reálného parametru, pro které platí, že jsou z určité číselné množiny, kterou určete.

Při řešení této úlohy použijeme poznatky:

$ax^2+bx+c=0$	I	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	II	$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$	III

$$mx^2 + x + m = 0$$

$a = m \quad b = 1 \quad c = m$

Podle II platí: ① $x_1 + x_2 = -\frac{1}{m} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{m} - x_2$ ... do ②

„ III „ ② $x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{m} = 1 \ldots x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}$ (nepoužijeme)

$$\left(-\frac{1}{m} - x_2^2\right) \cdot x_2 - 1 = 0$$

$$-\frac{x_2}{m} - x_2^2 - 1 = 0 \quad | \cdot (-m)$$

$$x_2 + m x_2^2 + m = 0$$

Pro přehlednost provedeme substituci $x_2 = y$

$$my^2 + y + m = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m^2}}{2m}$$

Má-li mít kvadratická rovnice dva reálné různé kořeny, musí platit:

$D > 0$, čili

$$1 - 4m^2 > 0$$

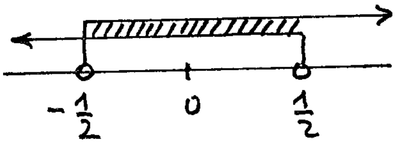
$$(1-2m) \cdot (1+2m) > 0 \Rightarrow$$

$$= (1 - 2m > 0 \wedge 1 + 2m > 0) \vee (1 - 2m < 0 \wedge 1 + 2m < 0)$$

$$-2m > -1 \quad \wedge \quad 2m > -1$$

$$2m < 1 \quad \wedge \quad 2m > -1$$

$$m < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m > -\frac{1}{2}$$



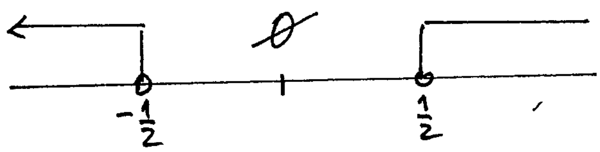
$$\boxed{m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}$$

$$1 - 2m < 0 \quad \wedge \quad 1 + 2m < 0$$

$$-2m < -1 \quad \wedge \quad 2m < -1$$

$$2m > 1 \quad \wedge \quad 2m < -1$$

$$m > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m < -\frac{1}{2}$$



Ověření správnosti: např. pro $m = \frac{1}{4}$ platí:

$$\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{3} \\ x_2 = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Kořeny x_1, x_2 jsou reálné a různé.
