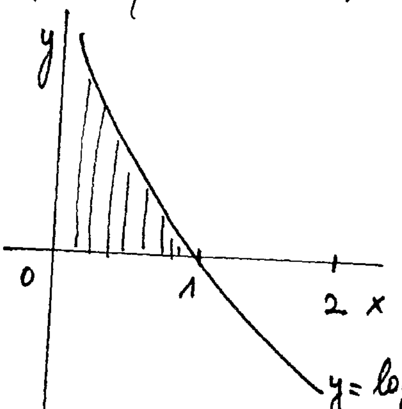
Příklady řešené v r. 2008 ze sbírky Ivana Buška:

Př. 20.1/185

Určete všechna $x \in R$, pro která nabývá funkce $f: y = \log_a \frac{4}{x-3}$, kde $0 < a < 1$ nezáporných hodnot.

Protože základ a logaritmu je z intervalu $(0;1)$, tak má graf následující podobu:



$y = \log_a \frac{4}{x-3}$, kde $0 < a < 1$. Existují pouze logaritmy kladných čísel, proto $\frac{4}{x-3} > 0$. Protože 4 je kladné číslo, musí platit, že $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$ (aby byl celý zlomek kladný ... $D_f = (3;+\infty)$.

Je požadováno, aby $\log_a \frac{4}{x-3} \geqq 0$ a místo 0 je $\log_a 1$ ($\log_a 1 = 0$),

$$\log_a \frac{4}{x-3} \geqq 0$$

$$\log_a \frac{4}{x-3} \geqq \log_a 1$$

Z grafu je zřejmé, že $\frac{4}{x-3}$ musí ležet v $(0;1\rangle$, tak platí:

$$\frac{4}{x-3} \leqq 1$$

$$4 \leqq x-3$$

$$x \geqq 7 \Rightarrow x \in \langle 7;+\infty)$$

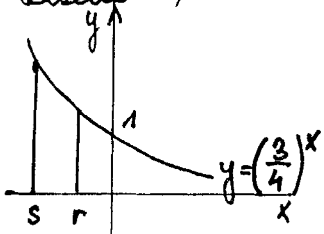
Ověříme si jistou skutečnost např. $x = 9$ a $a = 0{,}5$

$y = \log_{0,5} \frac{4}{x-3} \dashrightarrow y = \log_{0,5} \frac{4}{9-3} \dashrightarrow y = \log_{0,5} \frac{2}{3}$ Podle vzorce na str. 5 vypočítáme na kalkulačce: $\log_{0,5} \frac{2}{3} = \frac{\log_{10} \frac{2}{3}}{\log_{10} 0{,}5} \doteq 0{,}584\ldots$, a to je nezáporná hodnota.

Př. 20.4/188 Rozhodněte, jaký vztah platí mezi čísly r, s, je-li

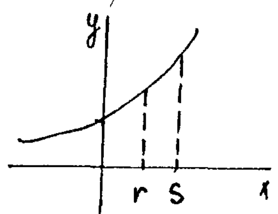
1) $\left(\frac{3}{4}\right)^r < \left(\frac{3}{4}\right)^s$ 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^r < \left(\frac{4}{3}\right)^s$ 3) $\left(\frac{4}{3}\right)^r = \left(\frac{4}{3}\right)^s$ 4) $\left(\frac{3}{3}\right)^r > \left(\frac{3}{3}\right)^s$

Řešení 1)



$y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ je funkce klesající, proto $\boxed{r>s}$

Řešení 2)



$y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ je funkce rostoucí, proto $\boxed{r<s}$

Řešení 3)

Funkce $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$, pro $x_1=r$, $x_2=s$ platí, že $\left(\frac{4}{3}\right)^r=\left(\frac{4}{3}\right)^s \Rightarrow$

$\boxed{r=s}$

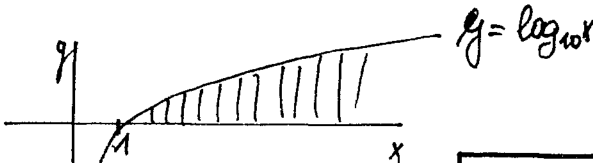
Řešení 4) (nejde vůbec o funkci exponenciální, ale pouze o funkci $y=1^x$. Vztah $1^r>1^s$ neplatí pro žádné $r,s\in R$.

20.4 b/188 Určete definiční obory

1) $f: y=\log_2(-x)$. Protože def. obor log. funkce je R^+, platí:

$-x>0 \; \dots \; x<0 \; \dots \; \boxed{D(f)=R^-}$

2) $g: y=\sqrt{\log x}$



$\log x$ je nezáporné číslo, proto $\log x \geq 0$ ... viz graf. $\boxed{D(g)=\langle 1,+\infty)}$

3) $h: y=\sqrt{\log(\log x)}$ ... jde logaritmus z $\log x$, např.

pro $x=4$ je $\log 4 \doteq 0{,}602$ ... log čísla $0{,}602 = -0{,}22 \Rightarrow$ číslo $x=4$ nepatří proto do $D(h)$. Obecné řešení: jde o složenou funkci. Zavedeme substituci: $\log x = z$. Po dosazení získáme $y=\sqrt{\log z}$ ... $\log z \geq 0$, a to je pro $z\geq 1 \Rightarrow D(h)=\langle 10;+\infty)$

Platí např. $\log_{10} 10 = 1$

$\log_{10} 11 = 1{,}0413\dots$

Proto $D(h)$ je $\langle 10;+\infty)$, ověříme např. pro $x=15$

$y=\sqrt{\log(\log 15)}=\sqrt{\log 1{,}17609\dots}=0{,}0704\dots$

Př. 20.5 /190

a) Vypočítejte 1) $a=\log_5 \frac{1}{5} \Rightarrow 5^a = \frac{1}{5}$ Vyřešíme jako exponenciální rovnici.

$$5^a = 5^{-1}$$

$$a=-1$$

Ověříme na kalkulačce platnost výsledku pomocí vzorce $\log_r t = \frac{\log_{10} t}{\log_{10} r}$ ... $\log_5 \frac{1}{5} = \frac{\log_{10}\frac{1}{5}}{\log_{10} 5} = -1$

---

b) $b = \log_5 \sqrt[5]{\frac{1}{25}} = \log_5 \sqrt[5]{\frac{1}{5^2}} = \log_5 \sqrt[5]{5^{-2}} =$

$b = \log_5 5^{-\frac{2}{5}} \Rightarrow 5^b = 5^{-\frac{2}{5}} \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$

Ověření na kalkulačce pomocí výše uvedeného vzorce:

$\log_5 5^{-\frac{2}{5}} = \frac{\log_{10} 5^{-\frac{2}{5}}}{\log_{10} 5} = \log_{10} \boxed{5}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{(}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{a^b/_c}\ \boxed{5}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

$\boxed{:}\ \log_{10} \boxed{5}\ \boxed{=}\ -0{,}4 = -\frac{2}{5}$

$c = 5^{\log_5 2}$ Použijeme vzorce $a^{\log_a x} = x$, proto $\boxed{c=2}$

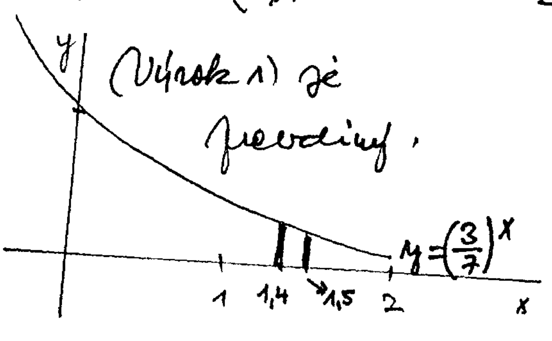
$d = 8^{1+\log_8 5} =$

$d = 8^1 \cdot 8^{\log_8 5} \nearrow$ $d = 8 \cdot 5$

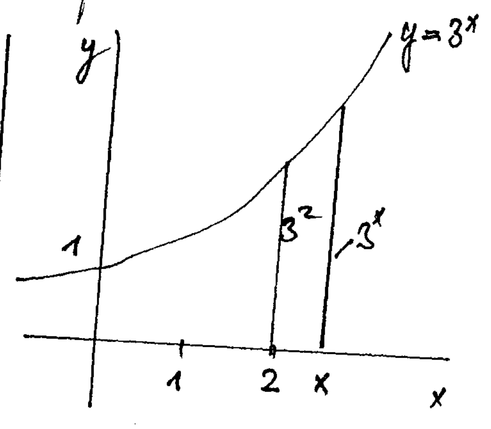
$\boxed{d=40}$

20.7/194 Které z výroků jsou pravdivé?

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{1,5} < \left(\frac{3}{7}\right)^{1,4}$



2)



$\forall x \in \mathbb{R} : x > 2 \Rightarrow 3^x \leq 3^2$

Výrok 2 není pravdivý

3) $\forall x \in R;\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow 2x > x-1$

Je-li daná nerovnice pravdivá, musí platit:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

$$\frac{1^x}{4^x} < \frac{1^{x-1}}{2^{x-1}}$$

$$\frac{1}{4^x} < \frac{1}{2^{x-1}}$$

$$\frac{1}{(2^2)^x} < \frac{1}{2^{x-1}}$$

$$2^{-2x} < 2^{(1-x)}$$

$$-2x < 1-x \quad | \cdot (-1)$$

$$\boxed{2x > x-1}$$

Daný výrok je pravdivý. Dodejme, že platí:

$2x - x > -1$

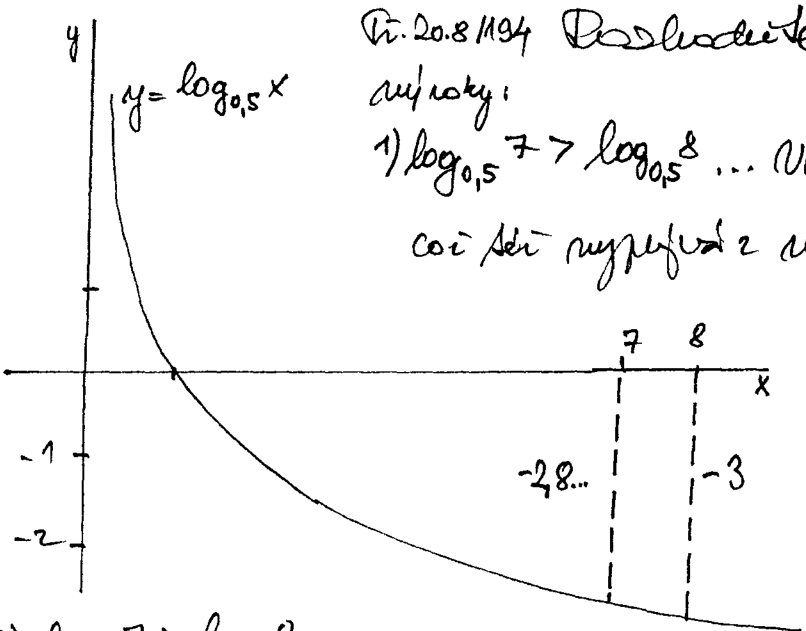
$x > -1$

Proto daný výrok platí pro $x > -1$.

např. pro $x = 3$ lze psát:

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ $\nearrow$ $\frac{1}{64} < \frac{1}{4}$, a to je pravdivý výrok.

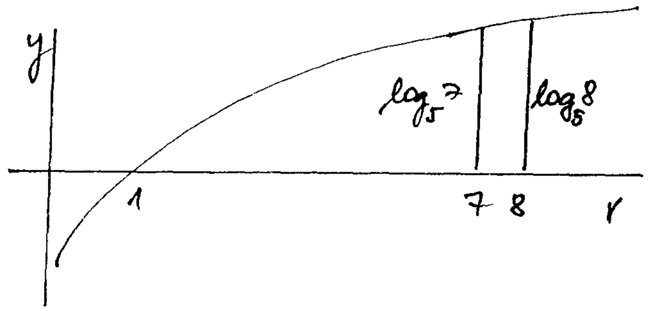


Př. 20.8/194 Rozhodněte, kde jsou pravdivé výroky:

1) $\log_{0,5} 7 > \log_{0,5} 8$ ... Výrok je pravdivý, což lze vyzkoušet z výpočtu na kalkulačce:

$-2,8 > -3$

2) $\log_5 7 \geqq \log_5 8$ ... výrok není pravdivý



3) $\log_5 7 < \log_{\frac{1}{5}} 7$

$\log_5 7 > 0 \wedge \log_{\frac{1}{5}} 7 < 0$

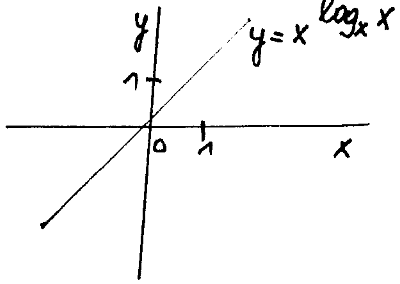
Výrok je nepravdivý

20.8b/194 Načrtněte grafy funkcí danými rovnicemi:

1) $y = x^{\log_x x}$ ... Platí $\log_x x = 1$, neboť $x^1 = x$

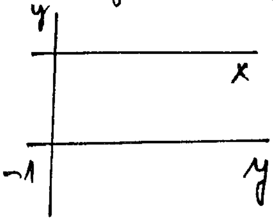
$y = x^1$ ... $\boxed{y = x}$,

kde $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$



2) $y = \log_x \frac{1}{x} \Rightarrow x^y = \frac{1}{x}$

$x^y = x^{-1} \Rightarrow \boxed{y = -1}$, kde $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$



20.8c/194 Určete definiční obory funkcí:

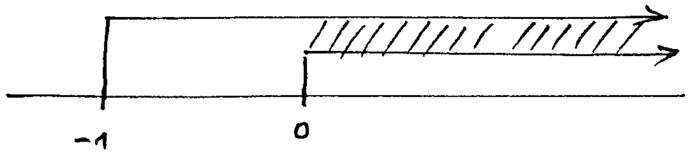
1) $f: y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} > 0 \Rightarrow$ to by mohlo nastat v případě,

že $(\sqrt{x} > 0 \wedge \sqrt{x+1} > 0) \vee (\underbrace{\sqrt{x} < 0 \wedge \sqrt{x+1} < 0}_{\text{To nemůže nastat}})$

$\downarrow$

$x > 0 \wedge x+1 > 0$

$x > 0 \wedge x > -1$

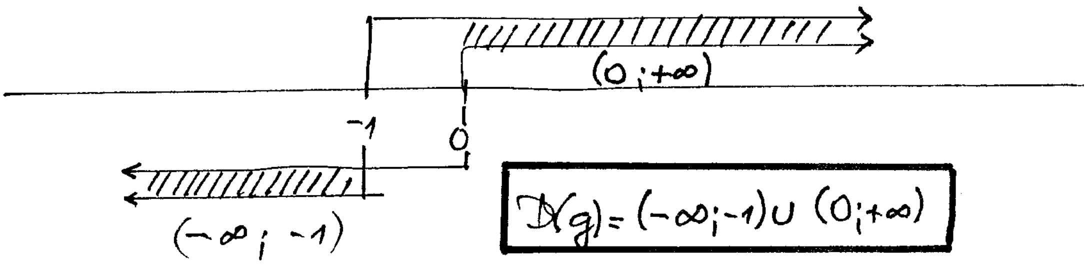


$\boxed{D(f) = (0;+\infty)}$ ... nula do $D(f)$ nepatří.

$g: y = \log\sqrt{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow \frac{x}{x+1} > 0$, a to nastane, jestliže platí:

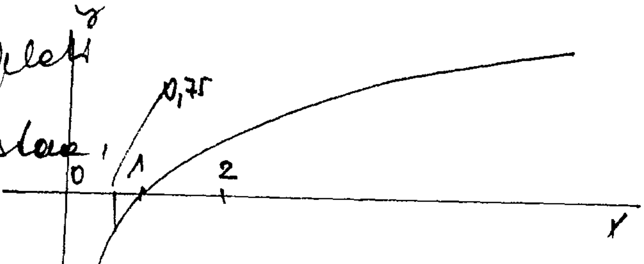
$(x > 0 \wedge x+1 > 0) \vee (x < 0 \wedge x+1 < 0)$

$(x > 0 \wedge x > -1) \vee (x < 0 \wedge x < -1)$



$\boxed{D(g) = (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)}$

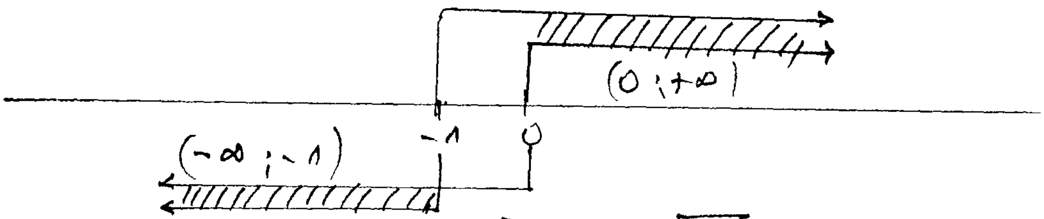
h: $y=\sqrt{\log\frac{x}{x+1}}$, to platí



pro $\log\frac{x}{x+1}>0$, nastane, když

$(x>0 \wedge x+1>0) \cup (x<0 \wedge x+1<0)$

$(x>0 \wedge x>-1) \cup (x<0 \wedge x<-1)$

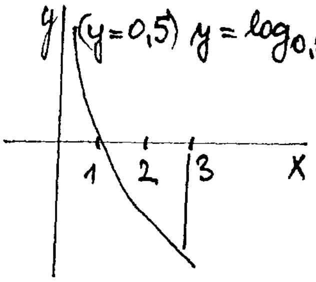


např. pro $x=-2$ je $y=\sqrt{\log\frac{-2}{-1}}=\sqrt{\log 2} \doteq 0{,}301 \ldots \quad 0{,}301>0$

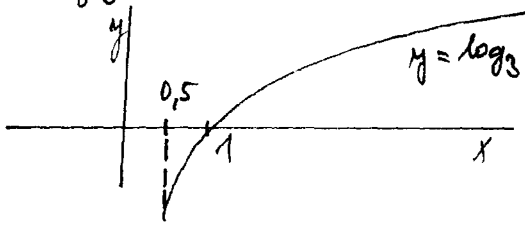
Druhý interval vůbec nevyhovuje (viz graf), neboť dostaneme pod odmocninou číslo z intervalu $(0;1)$, např. pro $x=3$ je $y=\sqrt{\log\frac{3}{4}}=\sqrt{\log 0{,}75}=-0{,}124$ a $-0{,}124<0$, viz záporné hodnoty na grafu. Proto $D(h)=(-\infty;-1)$

20.9 I/194 Určete pravdivostní hodnoty výroků

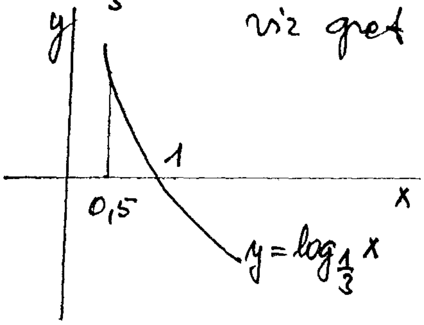
1) $\log_{0,5}3>0$ Podle grafu je $\log_{0,5}3<0$, $\boxed{\text{nepravda}}$



2) $\log_3 0{,}5>0$ je $\boxed{\text{nepravda}}$ - viz graf



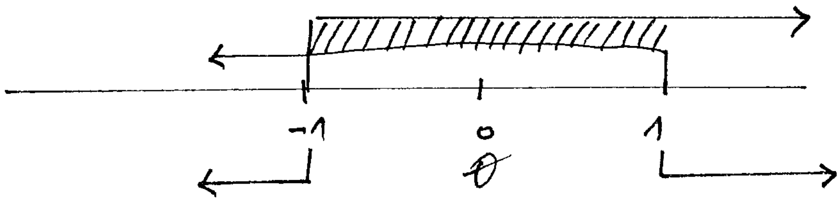
3) $\log_{\frac{1}{3}}0{,}5\geqq 0$ je $\boxed{\text{pravda}}$ viz graf



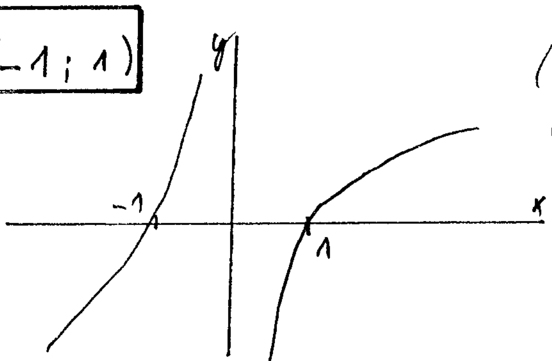
20.9 b/194 Určete $D(f)$ funkce f: $y=\log\frac{1-x}{1+x}$ a rozhodněte, zda je lichá, respektive sudá.

$$y = \log \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x>0 \wedge 1+x>0) \vee (1-x<0 \wedge 1+x<0)$$

$$(x<1 \wedge x>-1) \vee (x>1 \wedge x<-1)$$



$$\boxed{D(f) = (-1;1)}$$



např. pro $x=0{,}5$ a $x=-0{,}5$ je

$$y = \log \frac{0{,}5}{1{,}5} = -0{,}477$$

$$y = \log \frac{1{,}5}{0{,}5} = +0{,}477$$

Funkce je $\boxed{\text{lichá}}$ (~~to je po~~ Její graf je souměrný podle počátku os souřadnic.