1b) SINOVÁ VĚTA A JEJÍ UŽITÍ V PRAXI

Sinová věta: Poměr délek stran trojúhelníku ABC se rovná poměrům sinů velikostí protilehlých úhlů ($a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$)

Formulace z učebnice: Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ, platí

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

nebo

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$	$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

Sinovou větu použijeme při řešení těchto typů úloh:

A Z délky jedné strany Δ a z velikostí dvou jeho vnitřních úhlů vypočítáme délku jiné strany.

Příklad 1: V ΔABC je dáno: $a = 52\,cm$, $\beta = 63°14'$, $\gamma = 57°43'$. Vypočítejte: b, c, α

Řešení: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (63°14' + 57°43') = \boxed{59°03'} = \alpha$

Výpočet délky b:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$b = \frac{52 \cdot \sin 63°14'}{\sin 59°03'}$$

$$\boxed{b \doteq 54{,}136\ (cm)}$$

Výpočet délky c:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$a \cdot \sin\gamma = c \sin\alpha$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{52 \cdot \sin 57°43'}{\sin 59°03'}$$

$$\boxed{c \doteq 51{,}26\ (cm)}$$

Příklad 2: V ΔABC je dáno: $c = 20\,dm$, $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$. Vypočítejte γ, a, b.

Řešení: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (45° + 105°) = 30°$ ... $\boxed{\gamma = 30°}$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{20 \cdot \sin 45°}{\sin 30°} \doteq 28{,}28$$

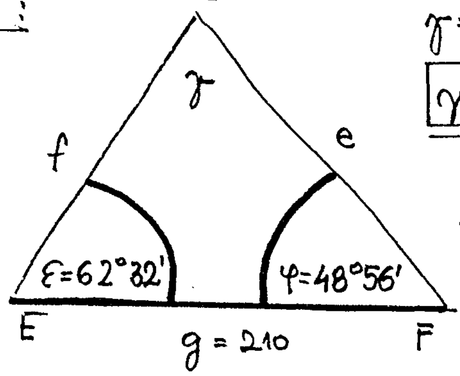
$$\boxed{a \doteq 28{,}28\ dm}$$

b samostatně

$$\boxed{b \doteq 38{,}64\ dm}$$

Příklad 3: V $\triangle EFG$ je dáno $g = 210$, $\varepsilon = |\sphericalangle GEF| = 62°32'$, $\varphi = |\sphericalangle EFG| = 48°56'$. Vypočítejte: $\gamma = |\sphericalangle FGE|$, f, e

Řešení:



$$\gamma = 180° - 62°32' - 48°56' = 68°32'$$

$$\boxed{\gamma = 68°32'}$$

$$\frac{e}{g} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma}$$

$$e = \frac{g \cdot \sin \varepsilon}{\sin \gamma} = \frac{210 \cdot \sin 62°32'}{\sin 68°32'}$$

$$\boxed{e \doteq 200{,}2}$$

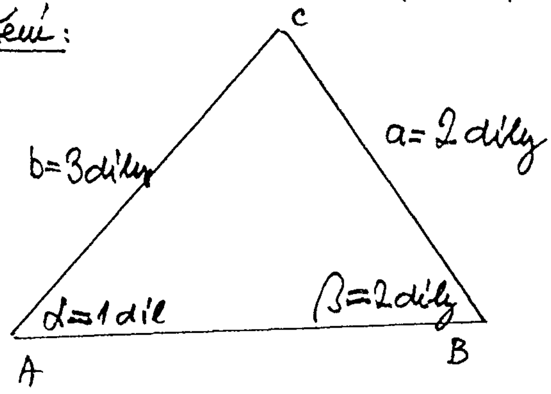
$$\frac{f}{g} = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma}$$

$$f = \frac{g \cdot \sin \varphi}{\sin \gamma} = \frac{210 \cdot \sin 48°56'}{\sin 68°32'} \doteq 170{,}1 \qquad \boxed{f \doteq 170{,}1}$$

Příklad 4: Určete velikosti vnitřních úhlů a poměr délek stran $\triangle$, jestliže platí:

$$a : b = 2 : 3, \quad \alpha : \beta = 1 : 2$$

Řešení:



Ze vztahu $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ plyne, že

$\boxed{\beta = 2\alpha}$ ... (1)

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ... dosadíme vztah (1) atd.

$\frac{2}{3} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$ ... použijeme vzorec $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$

$$\frac{2}{3} = \frac{\cancel{\sin \alpha}}{2 \cdot \cancel{\sin \alpha} \cos \alpha}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2 \cdot \cos \alpha}$$

$$4 \cdot \cos \alpha = 3$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 41°25'}$$

$$\beta = 2 \cdot \alpha \doteq 2 \cdot 41°25' = 82°50'$$

$$\boxed{\beta \doteq 82°50'}$$

$$\gamma \doteq 180° - 41°25' - 82°50' \doteq 55°45'$$

$$\boxed{\gamma \doteq 55°45'}$$

$$\boxed{a : b : c = \sin 41°25' : \sin 82°50' : \sin 55°45'}$$

Příklad 5: Určete poměr délek stran a, b, c v $\triangle ABC$, je-li $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$.

Řešení: $a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 \quad | \cdot 2$

$$\boxed{a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2}$$

Příklad 6: V $\triangle ABC$ platí: $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : 2$. Vypočítejte poměr délek stran tohoto $\triangle$.

Řešení: $\alpha : \beta : \gamma = \underbrace{1 : 1 : 2}_{4 \text{ díly}}$ $\quad 180° : 4 = 45° \ldots$ 1 díl $45° = \alpha$

1 díl $45° = \beta$

2 díly $90° = \gamma$

$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin 45° : \sin 45° : \sin 90°$

$a : b : c = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 \quad | \cdot 2$

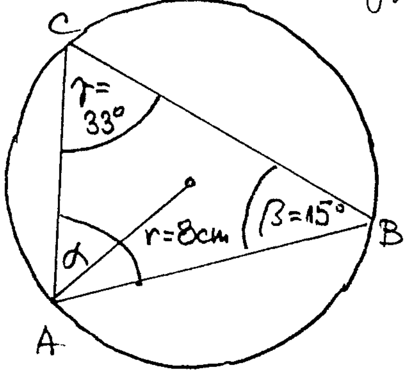
$$\boxed{a : b : c = \sqrt{2} . \sqrt{2} : 2}$$

Pro POLOMĚR KRUŽNICE OPSANÉ $\triangle ABC$ platí:

$r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}$	$r = \frac{b}{2 \cdot \sin\beta}$	$r = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$

Příklad 7: V $\triangle ABC$ je $\beta = 15°$, $\gamma = 30°$, poloměr opsané kružnice je $r = 8\,\text{cm}$. Vypočítejte obvod $\triangle ABC$.

Řešení



$r = \frac{b}{2 \cdot \sin\beta}$ | $r = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$

$b = r \cdot 2 \cdot \sin\beta$ | $c = r \cdot 2 \cdot \sin\gamma$

$b = 8 \cdot 2 \cdot \sin 15°$ | $c = 8 \cdot 2 \cdot \sin 33°$

$b \doteq 4{,}14\,(\text{cm})$ | $c \doteq 8{,}71\,(\text{cm})$

$\alpha = 180° - (33° + 15°) = 132°$

$r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha} \Rightarrow a = r \cdot 2 \cdot \sin\alpha = 8 \cdot 2 \cdot \sin 132° \doteq 11{,}9\,(\text{cm})$

$o_{\triangle ABC} = 4{,}14\,\text{cm} + 8{,}71\,\text{cm} + 11{,}9\,\text{cm} = 24{,}75\,\text{cm}$ $\quad \boxed{o \doteq 24{,}8\,\text{cm}}$

DALŠÍ VZORCE PRO VÝPOČET OBSAHU $\triangle ABC$

$S=\frac{1}{2}ab.\sin\gamma$	$S=\frac{1}{2}bc.\sin\alpha$	$S=\frac{1}{2}ac.\sin\beta$

Příklad 8: Vypočítejte obsah $\triangle ABC$, je-li dáno:

a) $b=3{,}2\,cm$, $c=7{,}5\,cm$, $\alpha=123°40'$

b) $a=7{,}9\,cm$, $b=58{,}3\,cm$, $\gamma=61°30'$

c) $c=80\,mm$, $\alpha=34°40'$, $\gamma=59°$

Řešení: ad a) $S_\triangle=\frac{1}{2}bc.\sin\alpha$

$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot 3{,}2\cdot 7{,}5.\sin 123°40'$

$\boxed{S_\triangle \doteq 9{,}99\ (cm^2)}$

b) $S_\triangle=\frac{1}{2}ab.\sin\gamma$

$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot 7{,}9.58{,}3.\sin 61°30'$

$\boxed{S_\triangle \doteq 202{,}4\ (cm^2)}$

c) $c=8\,cm$, $\alpha=34°40'$, $\gamma=59°$

Pomocí sinové věty určíme nejdříve délku strany b.

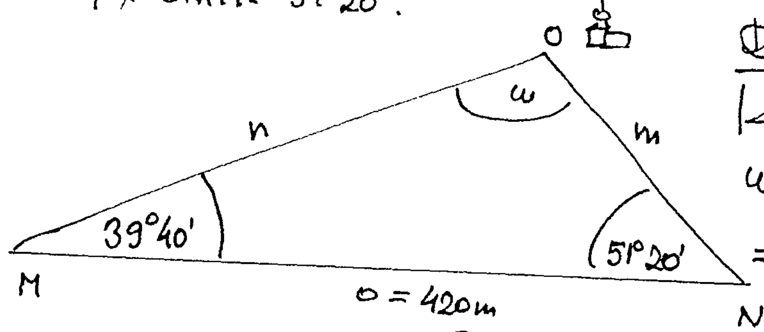
$\beta=180°-(34°40'+59°)=86°20'$

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\rightarrow b=c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=8.\frac{\sin 86°20'}{\sin 59°}\doteq 9{,}314\ (cm)$$

$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot bc.\sin\alpha \ \dots\ S_\triangle=0{,}5.9{,}314.8.\sin 34°40'$

$\boxed{S_\triangle \doteq 21\ (cm^2)}$

Příklad 9: 2 pozorovatelem umístěným v bodech M, N v rovném terénu vzdálených 420m je zaměřen kostel v bodě O. Vypočítejte vzdálenost kostela od obou pozorovatelů, víte-li, že $|\sphericalangle OMN|=39°40'$ a $|\sphericalangle ONM|=51°20'$.



Řešení (viz obr., kde $|\sphericalangle NOM|=\omega$).

$\omega=180°-(39°40'+51°20')$

$=89°$

$$\frac{n}{\sin 51^\circ 20'} = \frac{o}{\sin 89^\circ}$$

$$\frac{n}{\sin 51^\circ 20} = \frac{420}{\sin 89^\circ} \rightarrow n \doteq \frac{420}{\sin 89^\circ} \cdot \sin 51^\circ 20'$$

$$\boxed{n \doteq 328 (m)}$$

- - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{m}{\sin 39^\circ 40'} = \frac{o}{\sin 89^\circ}$$

$$\frac{m}{\sin 39^\circ 40'} = \frac{420}{\sin 89} \rightarrow m = \frac{420}{\sin 89^\circ} \cdot \sin 39^\circ 40'$$

$$\boxed{m \doteq 268 (m)}$$

Příklad 10: Určete velikosti vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku ABC a poměr délek jeho stran a, b, c, je-li $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 10$

Řešení:

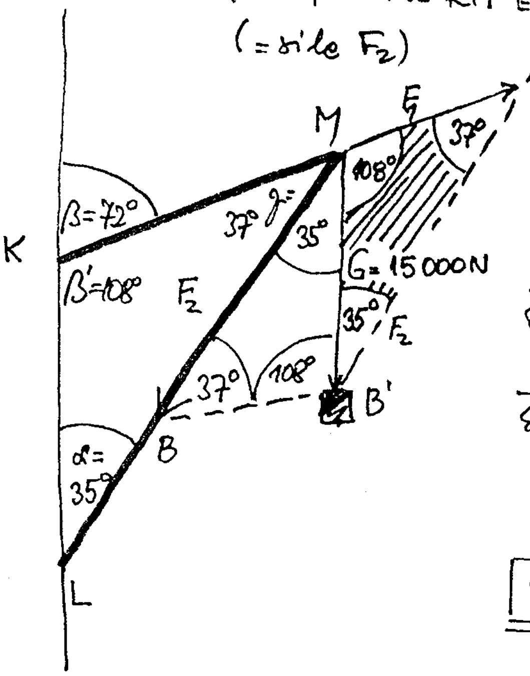
$3 + 5 + 10 = 18$ (dílů) ; $180^\circ : 18 = 10^\circ$ … 3 díly : $3 . 10^\circ = 30^\circ = \alpha$

5 dílů : $5 . 10^\circ = 50^\circ = \beta$

10 dílů : $10 . 10^\circ = 100^\circ = \gamma$

$$\boxed{a : b : c} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \boxed{\sin 30^\circ : \sin 50^\circ : \sin 100^\circ}$$

Příklad 11: Nosník KLM s rameny KM a ML je upevněn na svislé stěně; $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 72^\circ$ (viz obr.) V bodě M je nosník zatížen břemenem o tíze $G = 15\,000$ N. Vypočítejte velikost tahu na rameno KM (síle F_1) a velikost tlaku na rameno ML (= síle F_2)



Řešení: $\beta' = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$, $\gamma = 180^\circ - (108^\circ + 35^\circ) = 37^\circ$

Výpočet po doplnění úhlů provedeme pomocí sinové věty uplatněné na $\triangle AMB$

$$\frac{F_1}{\sin 35^\circ} = \frac{G}{\sin 37^\circ}$$

$$\frac{F_1}{\sin 35^\circ} = \frac{15\,000}{\sin 37^\circ}$$

$$F_1 = \frac{15\,000}{\sin 37^\circ} \cdot \sin 35^\circ$$

$$\boxed{F_1 \doteq 14\,296 (N)}$$

$F_2 = |MB| = |AB'|$

$$\frac{F_2}{\sin 108^\circ} = \frac{15\,000}{\sin 37^\circ}$$

$$F_2 = \frac{15\,000}{\sin 37^\circ} \cdot \sin 108^\circ$$

$$\boxed{F_2 \doteq 23\,704 (N)}$$