4. STEREOMETRIE

4.1. Hranol (sbírka μ00A)

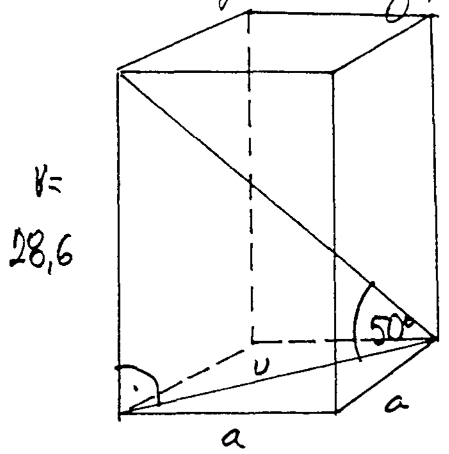
(1.) Kolik vrcholů, hran a stěn má:

a) čtyřboký b) pětiboký c) šestiboký hranol?

Řešení:

a) 8, 12, 6 b) 10, 15, 7 c) 12, 18, 8

(2.) Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož výška v = 28,6 cm a tělesová úhlopříčka svírá s rovinou podstavy úhel 50°.



$tg\, 50° = \frac{v}{u}$

$tg\, 50° = \frac{28{,}6}{u}$

$u = 28{,}6 : tg\, 50°$

$u = 23{,}998\,249\,45$

$u = a \cdot \sqrt{2}$

$a = \frac{u}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{23{,}998\ldots}{\sqrt{2}}$

$a \doteq 16{,}969\,324\,492$

$V = S_p \cdot v$

$V = a^2 \cdot v$

$V = 16{,}969\,324\,492^2 \cdot 28{,}6$

$\boxed{V \doteq 8\,325{,}598\ cm^3}$

$S = 2S_p + S_{pl}$

$S = 2a^2 + 4a \cdot v$

$S = 2 \cdot 16{,}969\ldots^2 + 4 \cdot 16{,}969\ldots \cdot 28{,}6$

$\boxed{S \doteq 2517{,}2067\ cm^2}$

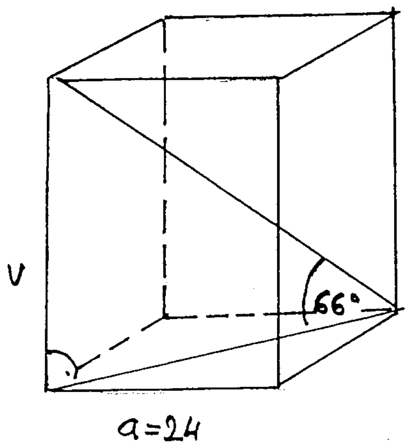
(3.) Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého hranolu o podstavné hraně a = 24 cm, jestliže tělesová úhlopříčka svírá s podstavou úhel 66°; obr. na str. 2.

$tg\, 66° = \frac{v}{u}$ $u = a \cdot \sqrt{2}$ $24 \cdot \sqrt{2} = \frac{v}{tg\, 66°}$

$u = \frac{v}{tg\, 66°}$ = $u = 24 \cdot \sqrt{2}$

$v = 24 \cdot \sqrt{2} \cdot tg\, 66°$

$\boxed{v \doteq 76{,}233}$



$V = a^2 \cdot v$

$V = 24^2 \cdot 76{,}233$

$\boxed{V \doteq 43910{,}217 \text{ cm}^3}$

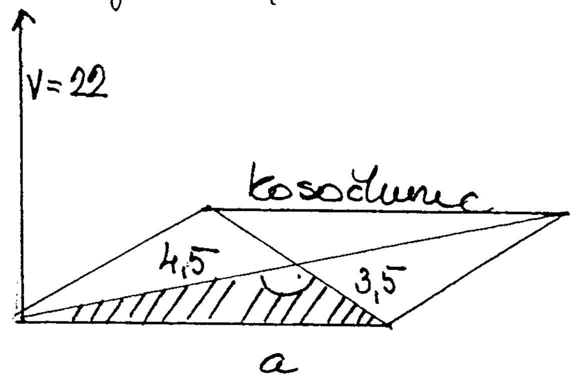
$S = 2a^2 + 4av$

$S = 2 \cdot 24^2 + 4 \cdot 24 \cdot 76{,}233$

$\boxed{S \doteq 8470{,}368 \text{ cm}^2}$

---

4) Podstavou čtyřbokého hranolu je kosočtverec, který má úhlopříčky 7cm a 9cm. Výška hranolu je 22cm. Vypočítejte jeho objem a povrch.



$a = \sqrt{4{,}5^2 + 3{,}5^2}$

$a \doteq 5{,}700\,877\,126$

$S_p = \dfrac{u_1 \cdot u_2}{2} = \dfrac{9 \cdot 7}{2} = 31{,}5$

$V = S_p \cdot v$

$V = 31{,}5 \cdot 22$

$\boxed{V = 693 \text{ cm}^3}$

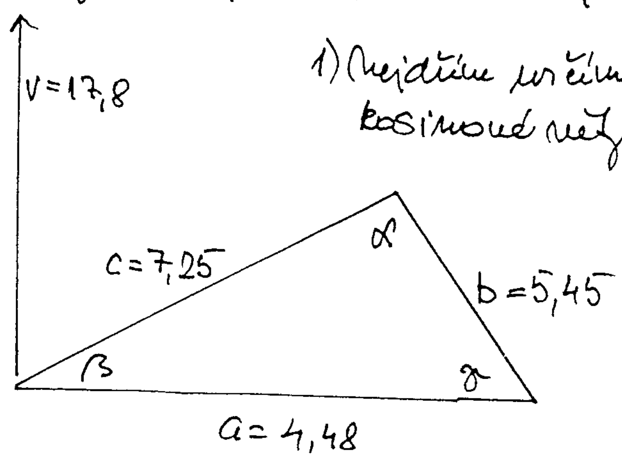
$S = 2S_p + S_{pl}$

$S = 2 \cdot 31{,}5 + 4 \cdot 5{,}700877126 \cdot 22$

$\boxed{S \doteq 564{,}677 \text{ cm}^2}$

---

5) Určete objem trojbokého hranolu, jehož podstava má hrany $a = 4{,}48$cm, $b = 5{,}45$cm, $c = 7{,}25$cm a jehož výška je 17,8cm.



1) Nejdříve určíme α (nebo β nebo γ) pomocí kosinové věty.

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{5{,}45^2 + 7{,}25^2 - 4{,}48^2}{2 \cdot 5{,}45 \cdot 7{,}25} = 0{,}787\,024\,359$

$\Rightarrow \alpha = 38°5'30''$

$S_\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$ (viz učivo o sinové a kosinové větě)

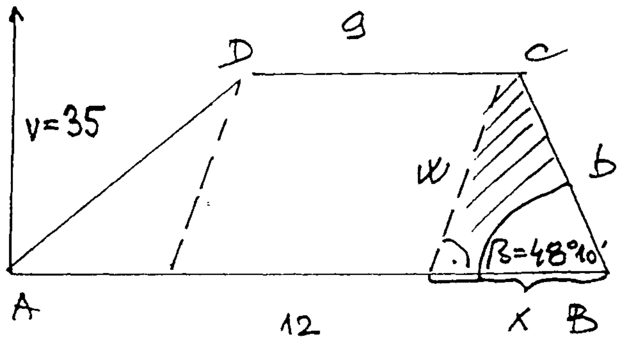
$S_\Delta = 0{,}5 \cdot 5{,}45 \cdot 7{,}25 \cdot \sin 38°5'30''$

$\underline{S_\Delta \doteq 12{,}188\ (cm^2)}$

$V = S_p \cdot v \dots V = S_\Delta \cdot v \dots V = 12{,}188 \cdot 17{,}8 \dots \boxed{V \doteq 216{,}947\ cm^3}$

---

6) Podstavou hranolu je rovnoramenný lichoběžník ABCD se základnami |AB| = 12 cm, |CD| = 9 cm. Úhel při vrcholu B je 48°10'. Urči objem a povrch hranolu, je-li jeho výška 35 cm.



$x = \frac{12-9}{2} = 1{,}5$

$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{w}{x}$

$w = x \cdot \mathrm{tg}\,\beta$

$w = 1{,}5 \cdot \mathrm{tg}\,48°10'$

$w = 1{,}675\,695\,694$

$S_p = \frac{a+b}{2} \cdot w = \frac{12+9}{2} \cdot 1{,}675\,695\,694$

$S_p = 10{,}5 \cdot 1{,}675\,695\,694 \doteq \dots S_p \doteq 17{,}5948\ (cm^2)$

$V = S_p \cdot v$

$V = 17{,}5948 \cdot 35$

$\boxed{V \doteq 615{,}818\ cm^3}$

$b = \sqrt{w^2 + x^2} = \sqrt{1{,}675\,695\,694^2 + 1{,}5^2}$

$b \doteq 2{,}24899$

obvod podstavy označme $\underline{o}$.

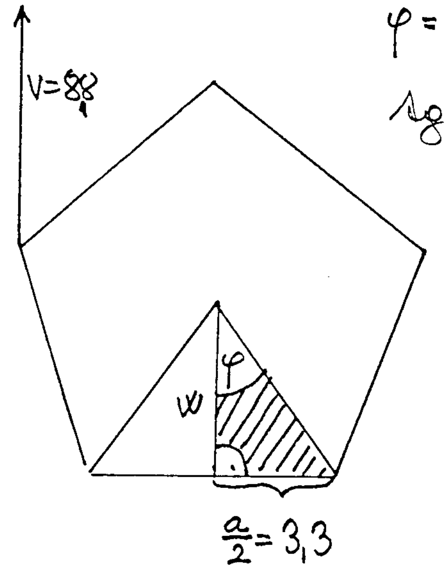
$o = 2b + 12 + 9 = 2 \cdot 2{,}24899 + 21 \dots o = 25{,}49798\ (cm)$

$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 17{,}5948 + 25{,}49798 \cdot 35$

$\boxed{S \doteq 927{,}6189\ cm^2}$

---

(7) Vypočítejte objem a povrch pravidelného pětibokého hranolu o podstavné hraně $a = 6{,}6\,cm$ a výšce $V = 8{,}8\,cm$.



$\varphi = 360° : 10 = 36°$

$\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{0{,}5a}{w}$

$w = \dfrac{0{,}5a}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{3{,}3}{\operatorname{tg} 36°} \rightarrow w \doteq \boxed{4{,}542\ (cm)}$

$S_p = \dfrac{a \cdot w}{2} \cdot 5$

$S_p = \dfrac{6{,}6 \cdot 4{,}542}{2} \cdot 5$

$S_p \doteq 74{,}943\ (cm)$

obvod podstavy: $o = 5a = 5 \cdot 6{,}6 = 33$

$V = S_p \cdot v$

$S = 2S_p + S_{pl}$

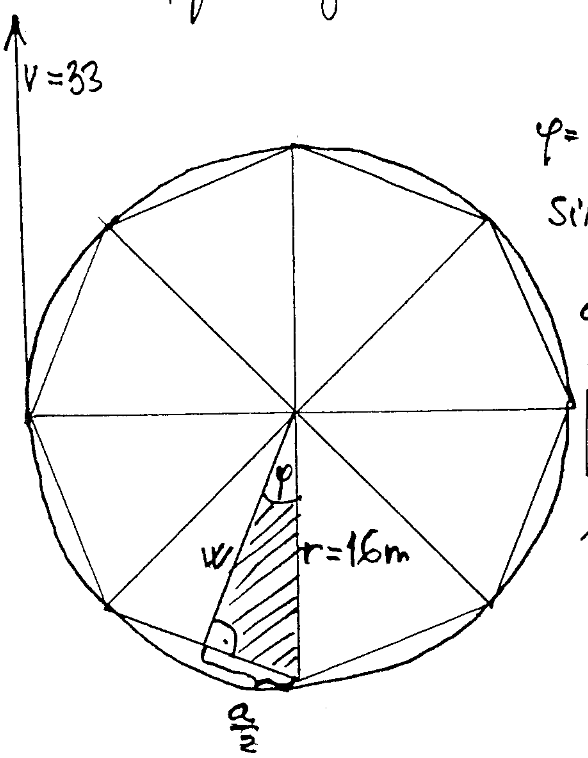
$V = 74{,}943 \cdot 8{,}8$

$S = 2 \cdot 74{,}943 + 33 \cdot 8{,}8 \ldots \boxed{S \doteq 440{,}286\ cm^2}$

$\boxed{V \doteq 659{,}4984\ cm^3}$

---

(8) Vypočítejte objem a povrch pravidelného osmibokého hranolu, jehož podstavě lze opsat kružnici o poloměru $r = 16\ m$. a jehož výška je 33 m



$\varphi = 360° : 16 = 22°30'$

$\sin \varphi = \dfrac{0{,}5a}{r}$

$a = \dfrac{r \cdot \sin\varphi}{0{,}5} = \dfrac{16 \cdot \sin 22°30'}{0{,}5}$

$\boxed{a \doteq 12{,}245\,869\,84\ m}$

$\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{0{,}5a}{w}$

$w = \dfrac{0{,}5a}{\operatorname{tg}\varphi}$

$$w = \frac{0{,}5 \cdot 12{,}245\,869\,84}{\operatorname{tg} 22°30'} \quad \ldots \quad \boxed{w \doteq 14{,}782 \text{ m}}$$

obvod podstavy: $o = 8 \cdot a = 8 \cdot 12{,}245\,869\,84 = 97{,}966\,958\,76$

$S_p = \frac{a \cdot w}{2} \cdot 8$

$S_p = 4aw$

$S_p = 4 \cdot 12{,}245\,869\,84 \cdot 14{,}782$

$S_p \doteq 724{,}074 \text{ m}^2$

$V = S_p \cdot v$

$V = 724{,}074 \cdot 33$

$\boxed{V \doteq 23\,894{,}442 \text{ m}^3}$

$S = 2S_p + S_{pl}$

$S = 2 \cdot 724{,}074 +$

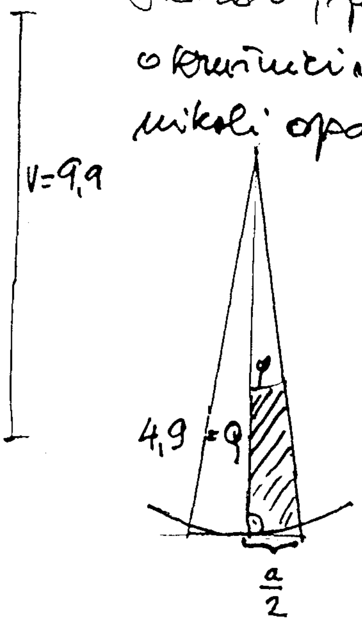
$+ 97{,}966\ldots \cdot 33$

$\boxed{S \doteq 4681{,}0576 \text{ m}^2}$

---

9) Vypočítejte V a S pravid. 10-bokého hranolu, jehož podstavě lze vepsat kružnici o poloměru $\varrho = 4{,}9$ cm, je-li $V = 9{,}9$ cm.

Pozor, jde o kružnici vepsanou, nikoli opsanou



$\varphi = 360° : 20 = 18°$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0{,}5a}{\varrho}$

$0{,}5a = \varrho \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad / \cdot 2$

$a = 2 \cdot \varrho \cdot \operatorname{tg} \varphi$

$a = 2 \cdot 4{,}9 \cdot \operatorname{tg} 18°$

$a = 3{,}184\,213\,023$ (cm)

$S_p = \frac{a \cdot \varrho}{2} \cdot 10$

$S_p = 5a\varrho$

$S_p = 5 \cdot 3{,}184\,213\,023 \cdot 4{,}9$

$S_p = 78{,}013 \text{ cm}^2$

$V = S_p \cdot v$

$V = 78{,}013 \cdot 9{,}9$

$\boxed{V \doteq 772{,}33 \text{ (cm}^3)}$

Obvod podstavy:

$o = 10a$

$o = 10 \cdot 3{,}184\,213\,023$

$o \doteq 31{,}842$ (cm)

$S \doteq 2S_p + S_{pl}$

$S = 2 \cdot 78{,}013 + o \cdot v$

$S = 156{,}026 + 31{,}842 \cdot 9{,}9$

$\boxed{S \doteq 471{,}262 \text{ (cm}^2)}$

* (10) Povrch kvádru je 304; jeho rozměry jsou v poměru 2 : 4 : 5. Určete objem kvádru.

$a : b : c = 2 : 4 : 5$

$2(ab + ac + bc) = 304 \quad | : 2$

$ab + ac + bc = 152$

$\frac{b}{a} = \frac{4}{2} \qquad \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$

$\frac{b}{a} = 2 \qquad \boxed{c = 2{,}5a}$

$\boxed{b = 2a}$

$ab + ac + bc = 152$

$a \cdot 2a + a \cdot 2{,}5a + 2a \cdot 2{,}5a = 152$

$2a^2 + 2{,}5a^2 + 5a^2 = 152$

$9{,}5a^2 = 152 \quad | : 9$

$a^2 = 16$

$\boxed{a = 4}$

$b = 2 \cdot 4 \qquad c = 2{,}5 \cdot 4$

$\boxed{b = 8} \qquad \boxed{c = 10}$

Zkouška: $a : b : c = 4 : 8 : 10 \quad | : 2$

$a : b : c = 2 : 4 : 5$

$V = abc = 4 \cdot 8 \cdot 10 = 320 \qquad \boxed{V = 320}$

---

* (11) Rozměry kvádru jsou v poměru 3:4:7, jeho objem je 672. Určete velikosti stěnových úhlopříček.

$a : b : c = 3 : 4 : 7$

Velikost 1 dílu ... x (délkových jednotek) $\Rightarrow$

$a = 3x,\ b = 4x,\ c = 7x$

$V = abc$

$672 = 3x \cdot 4x \cdot 7x$

$84x^3 = 672 \quad | : 84$

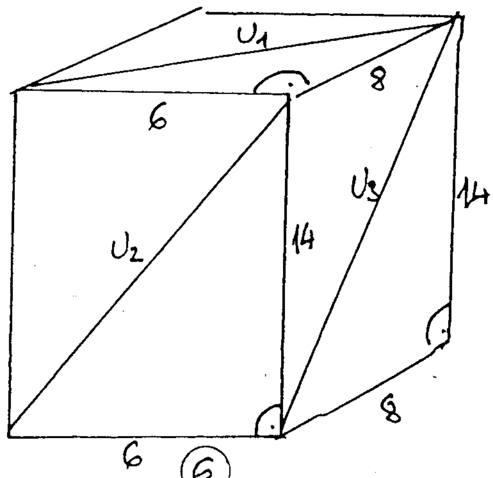
$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8}$

$\boxed{x = 2}$

$a = 3 \cdot 2 \qquad b = 4 \cdot 2 \qquad c = 7 \cdot 2$

$\boxed{a = 6} \qquad \boxed{b = 8} \qquad \boxed{c = 14}$



$U_1 = \sqrt{8^2 + 6^2}$

$U_1 = \sqrt{100}$

$\boxed{U_1 = 10}$

$U_2 = \sqrt{14^2 + 6^2}$

$U_2 = \sqrt{232} = \sqrt{4 \cdot 58}$

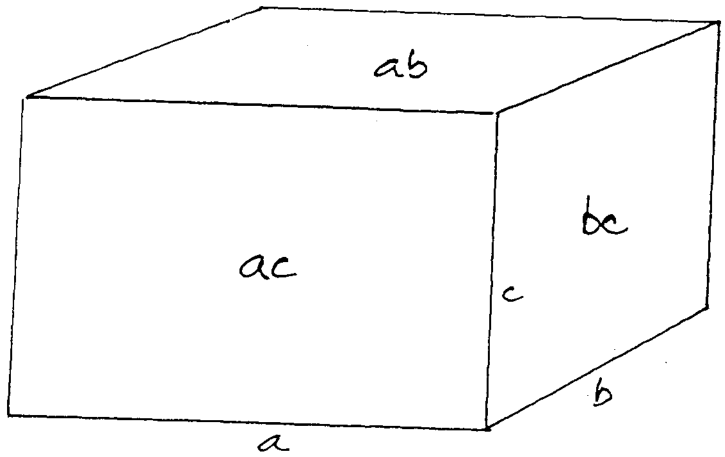
$\boxed{U_2 = 2\sqrt{58} \doteq 15{,}23}$

$$u_3 = \sqrt{14^2+8^2} = \sqrt{260} = \sqrt{4.65} = \boxed{2.\sqrt{65} \doteq 16{,}12 = u_3}$$

---

* (12) Obsahy stěn kvádru, které procházejí týmž vrcholem, jsou v poměru 5:4:3; jeho objem je 3,6 dm³. Určete povrch kvádru.

$ab : ac : bc = 5:4:3$



$$\frac{ab}{ac} = \frac{5}{4} \ldots \frac{b}{c} = \frac{5}{4} \ldots b = \frac{5}{4}c$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{5}{3} \ldots \frac{a}{c} = \frac{5}{3} \ldots a = \frac{5}{3}c$$

$3{,}6\,dm^3 = 3600\,cm^3$

$V = abc$

$3600 = \frac{5}{3}c \cdot \frac{5}{4}c \cdot c$

$3600 = \frac{25}{12}c^3$

$c^3 = 1728$

$c = \sqrt[3]{1728}$

$c = 12\,(cm)$, $\boxed{c = 1{,}2\,dm}$

$a = \frac{5}{3} \cdot 1{,}2$ $\quad b = \frac{5}{4} \cdot 1{,}2$

$a = 2\,(dm)$ $\quad b = 1{,}5\,(dm)$

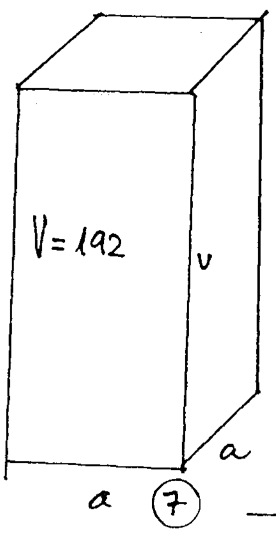
$S = 2(ab + ac + bc)$

$S = 2 \cdot (3 + 2{,}4 + 1{,}8)$

$\boxed{S = 14{,}4\,dm^2}$

---

* (13) Objem pravidelného čtyřbokého hranolu je 192; jeho podstavná hrana a výška jsou v poměru 1:3. Určete je.



$\frac{a}{v} = \frac{1}{3}$ $\quad V = a^2 \cdot v$

$v = 3a$ $\quad V = a^2 \cdot 3a$

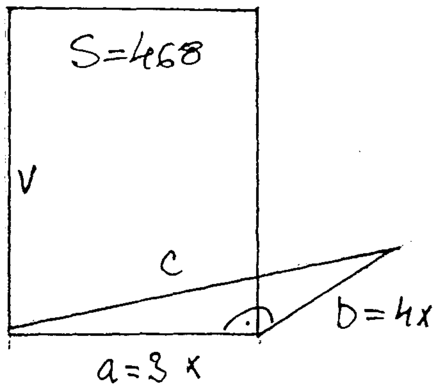
$3a^3 = 192 \quad |:3$

$a^3 = 64$

$a = \sqrt[3]{64} = 4$, $v = 3 \cdot 4 = 12$

$\boxed{a = 4}\ \boxed{v = 12}$

*(14) Podstavou kolmého hranolu je pravoúhlý Δ, jehož odvěsny jsou v poměru 3:4; výška hranolu je o 2 menší než delší odvěsna. Povrch hranolu je 468. Určete rozměry hranolu.



Označíme-li 1 díl v délkových jednotkách x, pak platí: $a=3x$, $b=4x$

$v = 4x-2$

$c = \sqrt{4^2+3^2}$

$c = 5 \ldots c=5x$

$S = 2S_p + S_{pl}$, obvod podstavy: $o = 3x+4x+5x = 12x$

$S = 2\cdot\frac{4x\,3x}{2} + 12x(4x-2)$

$468 = 12x^2 + 48x^2 - 24x$

$60x^2 - 24x - 468 = 0 \quad |:12$

$5x^2 - 2x - 39 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+780}}{10} = \frac{2\pm 28}{10} = \begin{cases} 3 \\ -2{,}6 \text{ (nevyhovuje)} \end{cases}$

$a=3x$ | $b=4x$ | $c=5x$ | $v=4x-2$

$a=3\cdot 3$ | $b=4\cdot 3$ | $c=5\cdot 3$ | $v=4\cdot 3-2$

$\boxed{a=9}$ $\boxed{b=12}$ $\boxed{c=15}$ $\boxed{v=10}$

KONEC ČLÁNKU 4.1