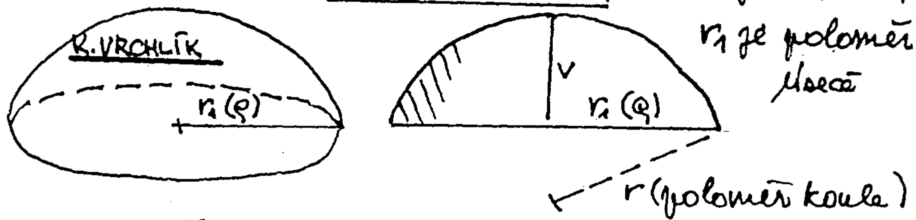
16 b) POVRCH A OBJEM KOULE A JEJICH ČÁSTÍ

KOULE $\boxed{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$ $\boxed{S=4\pi r^2}$

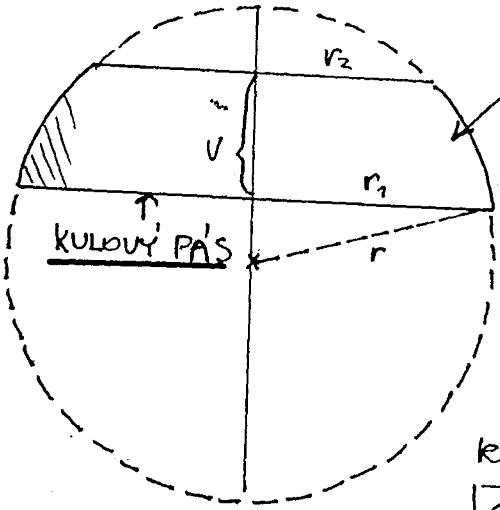
KULOVÁ ÚSEČ: $\boxed{V=\frac{\pi v}{6}(3r_1^2+v^2)}$

v je výška úseče

r_1 je poloměr podstavy úseče



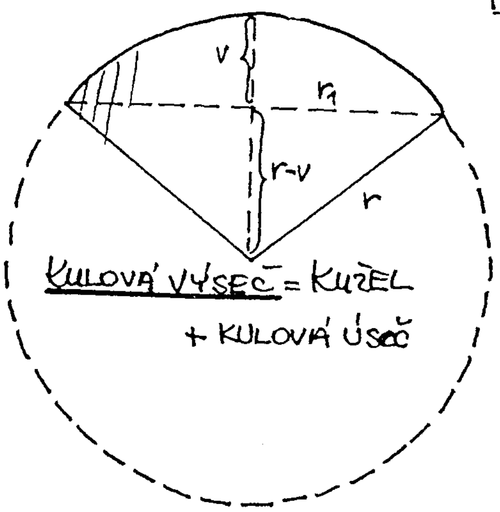
KULOVÁ VRSTVA



$V=\frac{\pi v}{6}(3r_1^2+3r_2^2+v^2)$, kde r_1, r_2 jsou poloměry podstav a v je výška vrstvy

Obsah kulového vrchlíku nebo kulového pásu:

$\boxed{S=2\pi r v}$, kde r je poloměr kulové plochy (koule)



Objem kulové výseče:

$V=\frac{2}{3}\pi r^2 v$	$S=\pi r(2v+r_1)$

Objem duté koule s poloměry r_1, r_2:

$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)}$

Příklad 1: Vypočítejte objem v dm^3, povrch v dm^2 a hmotnost v kg školního modelu dubové koule s průměrem $d=12$ cm a hustotou použitého dubu $\varrho=900\ kg.m^{-3}$.

Řešení: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad S = 4\pi r^2$ $\qquad m = V \cdot \rho$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}6^3$ $\qquad S = 4 \cdot \pi \cdot 0{,}6^2$ $\qquad m = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho$

$V \doteq 0{,}9\ (dm^3)$ $\qquad S \doteq 4{,}5\ (dm^2)$ $\qquad m = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}9$

$m \doteq 0{,}8\ (kg)$

Příklad 2: Koule určená k vrhům při atletických závodech má hmotnost 7250 g. Vypočítejte její průměr v cm, byla-li vyrobena z oceli s hustotou $\rho = 7800\ kg \cdot m^{-3}$.

Řešení: $m = V \cdot \rho$

$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$r = \sqrt[3]{m : \frac{4}{3}\pi\rho}$

$d = 2 \cdot \sqrt[3]{m : \frac{4}{3}\pi\rho}$

$d = 2 \cdot \sqrt[3]{7{,}25 : \frac{4}{3}\pi \cdot 7800}$

$d \doteq 0{,}121\ (m) \doteq \boxed{12{,}1\ (cm)}$

Příklad 3: Kolikrát se zvětší a) povrch koule, b) objem koule, jestliže se její poloměr zvětší x-krát?

Řešení a): Původní koule má poloměr r, zvětšená koule má poloměr x-krát větší, čili rx.

$S_1 = 4\pi r^2$, $S_2 = 4\pi(rx)^2 = 4\pi r^2 x^2 \ldots$ S se zvětší x^2-krát

b) $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi (rx)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 x^3 \ldots$ V se zvětší x^3-krát

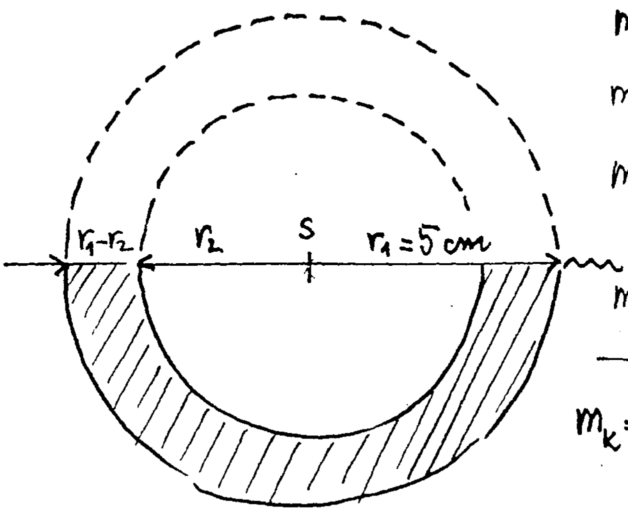
---

Příklad 4: Ponoříme-li dutou ocelovou kouli do vody, ponoří se svou polovinou. Vypočítejte tloušťku její stěny, jestliže vnější průměr koule je 1 dm a hustota oceli $7800\ kg \cdot cm^{-3}$.

Řešení: Hmotnost celé duté koule se rovná hmotnosti vody vytlačené touto koulí.

Označme: hmotnost vytlačené vody m_v.

—"— duté koule … m_k.



$m_V = V \cdot \varrho$

$m_V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \varrho$

$m_V = \frac{2}{3}\pi \cdot 5^3 \cdot 1$

$m_V = \frac{250}{3}\pi$

$m_K = \left(\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3\right)\cdot \varrho$

$m_K = \frac{4}{3}\pi\varrho\,(r_1^3 - r_2^3)$

$m_K = m_V$

$\frac{4}{3}\pi\varrho(r_1^3-r_2^3) = \frac{250}{3}\pi \quad /\cdot \frac{3}{\pi}$

$4\cdot 1\cdot(5^3 - r_2^3) = 250$

$500 - 4r_2^3 = 250$

$r_2 \doteq 3{,}9685$

$r_1 - r_2 = 5 - 3{,}9685$

$r_1 - r_2 \doteq 1{,}03$ (cm)

Tloušťka stěny duté koule je asi 1 cm.

Příklad 5: Vnější průměr duté koule je 20 cm. Určete tloušťku její stěny, má-li tato koule objem 5 litrů?

Řešení: $5\,l = 5000\ cm^3$

$V = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)$

$5000 = \frac{4}{3}\pi(10^3 - r_2)^3$

$r_2 \doteq 9{,}585$ (cm)

$r_1 - r_2 = 10 - 9{,}585$

$r_1 - r_2 \doteq 0{,}4$ (cm)

Tloušťka stěny dané duté koule je asi 0,4 cm.

Příklad 6: Vypočítejte povrch polokoule s průměrem $d = 2{,}6$ dm.

Řešení: Povrch polokoule S_p je tvořen kruhem a polovinou povrchu koule s poloměrem $r = 1{,}3$ dm.

$S_p = \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2$

$S_p = 3\pi r^2$

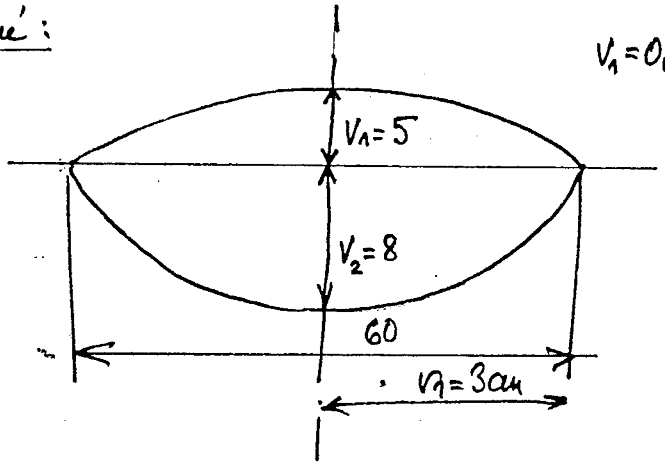
$S_p = 3\pi \cdot 1{,}3$

$\boxed{S_p \doteq 12{,}25\ (dm^2)}$

Příklad 7: Konvexní čočka je tvořena dvěma kulovými úsečemi (viz obr.). Rozměry jsou uvedeny v mm. Vypočítejte její hmotnost, je-li hustota jejího skla $\rho = 2{,}5\,g \cdot cm^{-3}$.

Řešení:

$v_1 = 0{,}5\,cm$, $v_2 = 0{,}8\,cm$, $r_1 = 3$



$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{\pi v_1}{6}(3r_1^2 + v_1^2) + \frac{\pi v_2}{6}(3r_1^2 + v_2^2)$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left[v_1 \cdot (3r_1^2 + v_1^2) + v_2(3r_1^2 + v_2^2)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left[0{,}5 \cdot (3 \cdot 3^2 + 0{,}5^2) + 0{,}8(3 \cdot 3^2 + 0{,}8^2)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{6}(0{,}5 \cdot 27{,}25 + 0{,}8 \cdot 27{,}64)$$

$$V \doteq 18{,}712\ (cm^3)$$

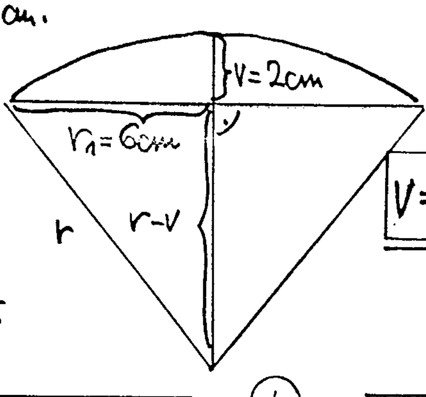
$$m = V \cdot \rho$$

$$m \doteq 18{,}712 \cdot 2{,}5$$

$$\boxed{m \doteq 46{,}78\ (g)}$$

Příklad 8: Určete V a S kulové výseče, jestliže kulová úseč (její část) má poloměr $r_1 = 6\,cm$ a výšku $v = 2\,cm$.

Řešení:



$$r^2 = (r-v)^2 + r_1^2$$

$$r^2 = (r-2)^2 + 6^2$$

$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} - 4r + 4 + 36$$

$$\boxed{r = 10\ (cm)}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 2$$

$$\boxed{V \doteq 419\ (cm^3)}$$

$$S = \pi r(2v + r_1)$$

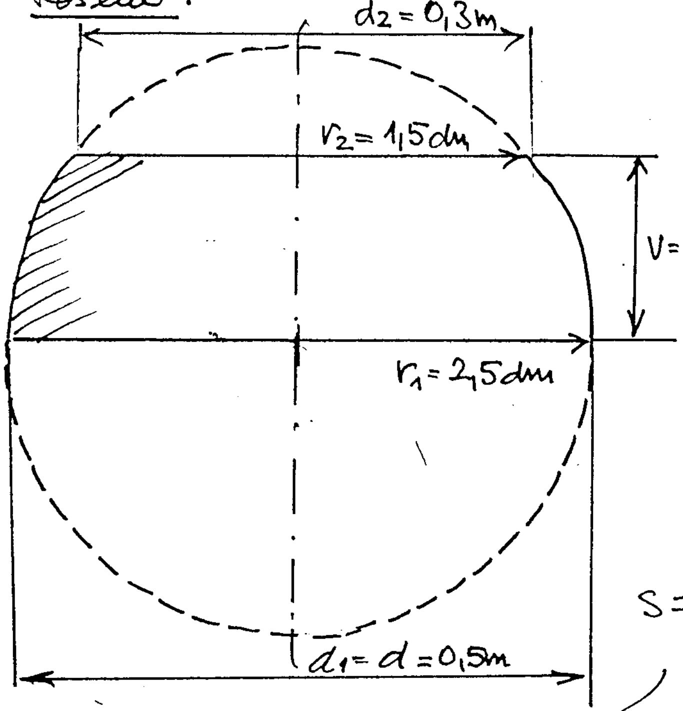
$$S = \pi \cdot 10 \cdot (4 + 6)$$

$$S = 100\pi$$

$$\boxed{S = 314{,}16\ (cm^2)}$$

Příklad 9: Vypočítejte povrch v dm^2 a objem v dm^3 kulové vrstvy, jestliže její větší průměr d_1 rovná průměru koule $d = 0{,}5\,m$, menší průměr $d_2 =$ $d_2 = 0{,}3\,m$ a výška vrstvy $v = 200\,mm$.

Řešení:



$$V = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$$

$$V = \frac{\pi . 2}{6}(3 . 2{,}5^2 + 3 . 1{,}5^2 + 2^2)$$

$$\boxed{V \doteq 30{,}89\ (dm^3)}$$

$S_{vrstvy} = S_{malé\ podstavy} + S_{velké\ podst.} + S_{kulového\ pásu}$

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + 2\pi r_1 v$$

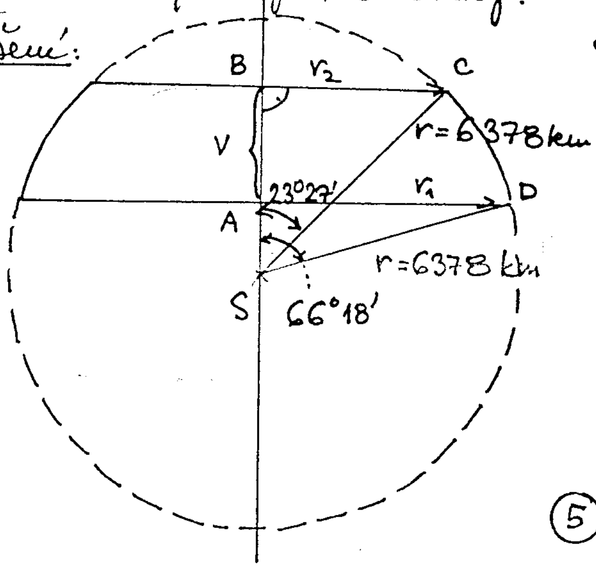
r koule je stejný jako r_1

$$S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 v)$$

$$S = \pi(2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2 . 2{,}5 . 2) \rightarrow \boxed{S \doteq 58{,}12\ (dm^2)}$$

Příklad 10: Kolik km^2 měří mírné pásmo na Zemi, které se rozprostírá mezi 23°27' a 66°18' severní zeměpisné šířky?

Řešení:



$\nabla R \triangle DAS$: $\sin 66°18' = \frac{r_1}{6378}$

$r_1 \doteq 5840\ (km)$

$\nabla R \triangle SCB$: $\cos 23°27' = \frac{|SB|}{6378}$

$|SB| \doteq 5851{,}22\ldots$

$\sin 23°27' = \frac{r_2}{6378}$

$r_2 = 2539{,}1..\ (km)$

VRA SAD:

$|SA| = \sqrt{r^2 - r_1^2}$

$|SA| = \sqrt{6378^2 - 5840^2}$

$|SA| \doteq 2563{,}8 \text{ (km)}$

$v = |SB| - |SA|$

$v = 5851{,}22\ldots - 2563{,}8\ldots$

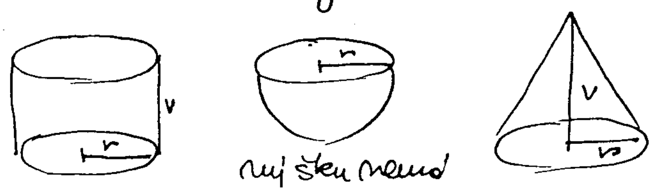
$v \doteq 3287{,}2 \text{ (km)}$

$S_{pásu} = 2\pi r v = 2\pi \cdot 6378 \cdot 3287{,}2 = 131\,731\,765 \doteq 132\,000\,000 \doteq$

$\doteq \boxed{132 \cdot 10^6 \text{ (km}^2\text{)}}$ je rozloha mírného pásu.

Příklad 11: Určete poměr objemů rotačního válce, polokoule a rotačního kužele se stejnými poloměry podstav a stejnými výškami.

Řešení:



$$V_1 : V_2 : V_3 = \pi r^2 v : \frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{1}{3}\pi r^2 v \quad |\cdot 3$$

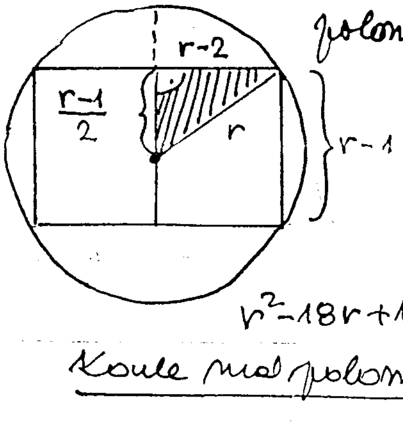
$$= 3\pi r^2 v : 2\pi r^3 : \pi r^2 v \quad |\cdot \frac{1}{\pi r}$$

$3rv : 2r^2 : rv$ ... pro $r = v$ platí:

$$3r^2 : 2r^2 : r^2 \quad | : r^2$$

$$\boxed{V_1 : V_2 : V_3 = 3 : 2 : 1}$$

Příklad 12: Do kulové plochy je vepsán rotační válec tak, že kulová plocha prochází podstavnými „hranami" válce. Poloměr podstavy válce je o 2 cm a výška o 1 cm menší než poloměr koule. Určete poloměr koule.



Řešení: $(r-2)^2 + \left(\frac{r-1}{2}\right)^2 = r^2$

$$\cancel{r^2} - 4r + 4 + \frac{r^2 - 2r + 1}{4} = \cancel{r^2} \quad |\cdot 4$$

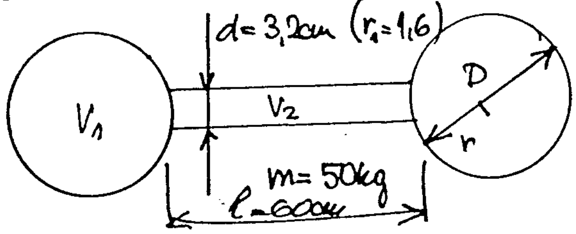
$$-16r + 16 + r^2 - 2r + 1 = 0$$

$r^2 - 18r + 17 = 0$ ... $r_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{18 \pm 16}{2} =$ $\boxed{r_1 = 17 \text{ (cm)}}$; r_2 nevyhovuje

Koule má poloměr 17 cm.

13 Činka na obrázku má ve skutečnosti hmotnost 50 kg. Jaký je průměr D koulí, je-li délka spojovací tyče tvaru válce $l = 60\,cm$ a její průměr $d = 32\,mm$. Hustota materiálu je $\rho = 7{,}8\,g \cdot cm^{-3}$.

Řešení:



m_t ... hmotnost tyče

m_k ... — " — 1 koule

$m_t = V_2 \cdot \rho$

$m_t = \pi r_1^2 \cdot l \rho$

$m_t = \pi \cdot 1{,}6^2 \cdot 60 \cdot 7{,}8$

$m_t \doteq 3763{,}879\,(g) \doteq 3{,}763879\,(kg)$

$m_k = (50\,kg - 3{,}763879\,kg) : 2$

$m_k \doteq 23{,}118\,(kg) = 23118\,(g)$

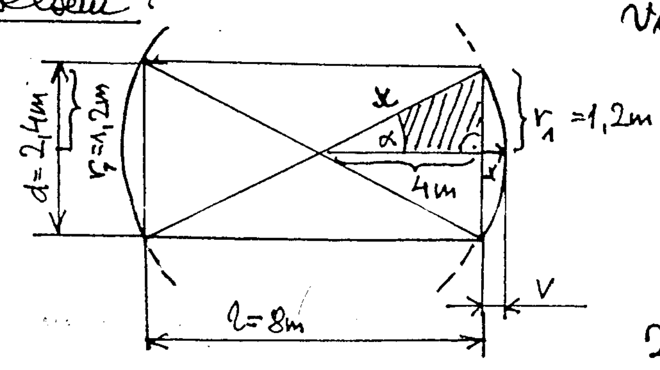
$m_k = V \cdot \rho$

$23118 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 7{,}8$

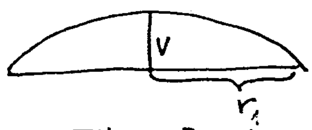
$r \doteq 8{,}91 \rightarrow \boxed{D \doteq 17{,}8\,cm}$ je průměr každé koule.

Příklad 14: Vagonovou cisternu tvoří válec délky $l = 8\,m$ s vnitřním průměrem $d = 2{,}4\,m$ a s čely tvaru kulových vrchlíků. Ty jsou částí kulové plochy, jejíž střed je v těžišti cisterny. Vypočtěte
a) úložný prostor cisterny (=V),
b) povrch cisterny (tloušťku materiálu neberte v úvahu).

Řešení:



Vrchlík je část povrchu kulové úseče.



$$V_u = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + v^2)$$

$$2V_u = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + v^2) \cdot 2 = \frac{\pi v}{3}(3r_1^2 + v^2)$$

Objem cisterny V je objem válce V_v + objem dvou úsečí $2V_u$.

$x = \sqrt{4^2 + 1{,}2^2}$ $\qquad v = x - 4$ $\qquad 2V_U \doteq \frac{\pi \cdot 0{,}176}{3} \cdot (3 \cdot 1{,}2^2 + 0{,}176^2)$

$\boxed{x \doteq 4{,}176\ (m)}$ $\qquad v = 4{,}176 - 4$ $\qquad 2V_U \doteq 0{,}8019\ (m^3)$

$\boxed{v = 0{,}176\ (m)}$

$V_{válce} = V_V = \pi r_1^2 \cdot l$

$V_V = \pi \cdot 1{,}2^2 \cdot 8 \doteq 36{,}19\ (m^3) \qquad V = V_V + 2V_U = 37\ (m^3)$

Cisterna má objem 37 m^3.

Povrch cisterny = obsah pláště válce + 2 . obsah vrchlíku

$S = S_{pl} + 2 \cdot S_v$

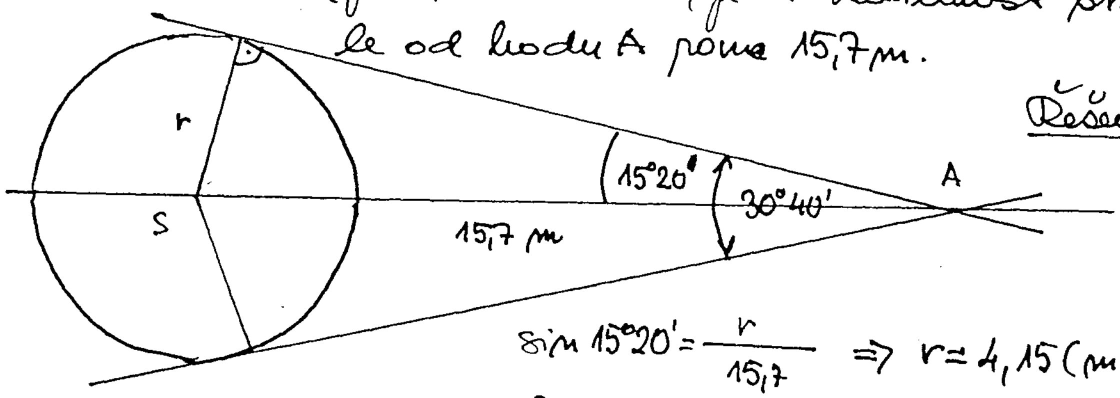
$S = 2\pi r_1 \cdot l + 2 \cdot 2\pi r_1 v$

$S = 2\pi \cdot 1{,}2 \cdot 8 + 4\pi \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}176 \doteq 63\ (m^2)$

Povrch cisterny je 63 m^2.

Příklad 15: Vypočítejte objem koule, kterou vidíme z bodu A pod úhlem 30°40', je-li vzdálenost středu S koule od bodu A rovna 15,7 m.

Řešení:

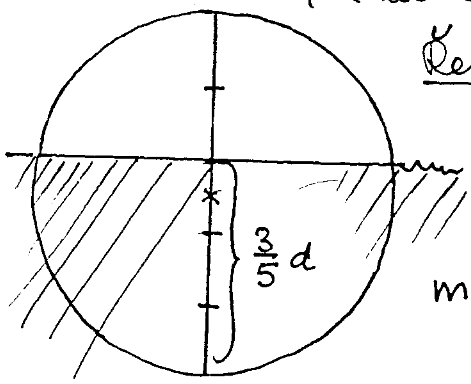


$\sin 15°20' = \frac{r}{15{,}7} \Rightarrow r \doteq 4{,}15\ (m)$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}15^3 = \boxed{299{,}39\ (m^3)}$

Příklad 16: Určete hmotnost dřevěné koule, která plave na vodě ponořená do $\frac{3}{5}$ svého průměru.

Řešení: $\underbrace{\text{Hmotnost vytlačené vody}}_{m_V} = \underbrace{\text{hmotnosti koule ze dřeva}}_{m_k}$



$\rho_{vody} = 1\,g \cdot cm^{-3}$

m vody v celé kouli je $m_V = V \cdot \rho$

$\boxed{m_V} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1 = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$

Platí tedy, že $m_V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\boxed{\frac{3}{5} m_V} = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \boxed{\frac{4}{5}\pi r^3}$$

$m_k = V\cdot\rho$ (kde ρ je hustota dřeva)

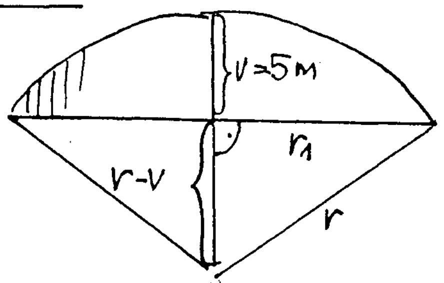
$m_k = \frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho$ a platí rovnost $\frac{4}{5}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \quad \Big|\cdot\frac{1}{4\pi r^3}$

$$\frac{1}{5} = \frac{\rho}{3}$$

$$\rho = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{\rho = 0{,}6\ g\cdot cm^{-3}}$$

Příklad 17: Kulová úseč s výškou $v = 5\,m$ má objem $V = 850\,m^3$. Určete poloměr koule, jejíž je částí.

Řešení:



$r_1^2 = r^2 - (r-v)^2$

$r_1^2 = r^2 - (r-5)^2$

$r_1^2 = r^2 - (r^2 - 10r + 25)$

$\boxed{r_1^2 = 10r - 25}$ neodmocňuj

$$V = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + v^2)$$

$$850 = \frac{\pi\cdot 5}{6}\left[3\cdot(10r-25)+25\right] \quad |\cdot 6$$

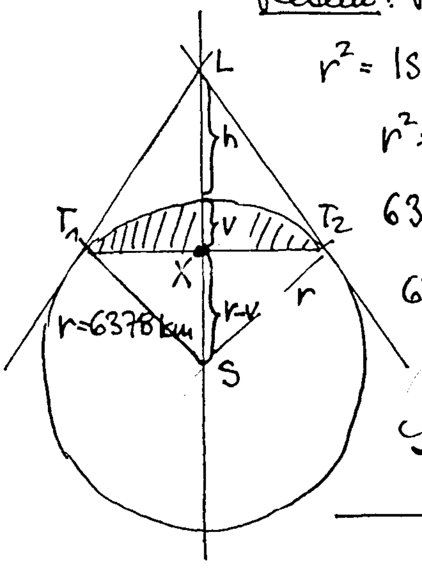
$$5100 = 5\pi(30r-50) \quad |:5$$

$$\rightarrow 30r - 50 = \frac{1020}{\pi}$$

$$\boxed{r \doteq 12{,}48\ (m)}$$

Příklad 18: Jak vysoko musí být letec, má-li vidět 0,001 zem. povrchu?

Řešení: Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí:



$r^2 = |SL|\cdot|XS|$

$r^2 = (r+h)\cdot(r-v)$

$6378^2 = (6378+h)\cdot(6378-12{,}756)$

$6378^2 = (6378+h)\cdot 6365{,}244$

$h = 12{,}78\ (km)$

$S_{vrchlíku} = 2\pi r v$

$2\pi r v = 0{,}001\cdot 4\pi r^2 \quad |:2\pi r$

$v = 0{,}001\cdot 2r$

$v = 0{,}001\cdot 2\cdot 6378$

$v \doteq 12{,}756\ (km)$

Letec musí letět ve výšce 12,78 km.