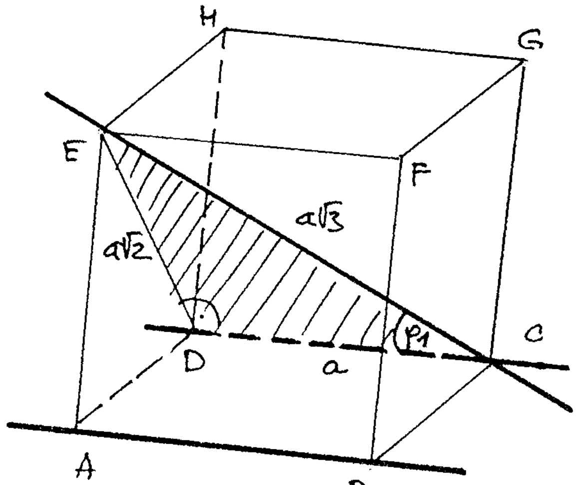
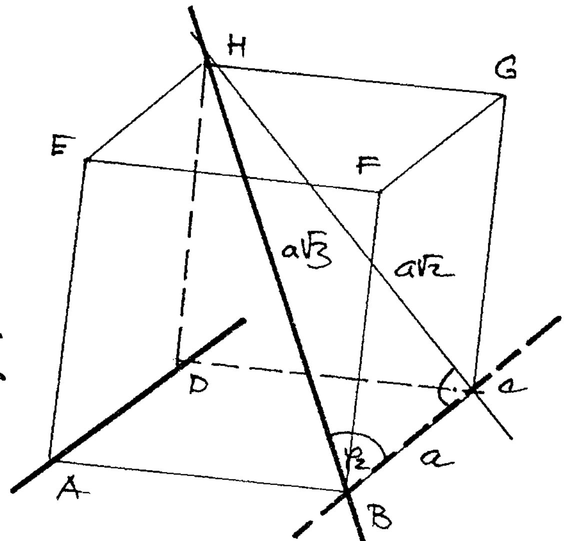
28b) KOLMOST A ODCHYLKA PŘÍMEK A ROVIN

<u>Odchylka dvou různoběžných přímek</u> je velikost každého z ostrých, nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají.
<u>Odchylka rovnoběžek</u> je 0° (0 rad).
<u>Odchylka dvou mimoběžek</u> je odchylka různoběžek vedených libovolným bodem v prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

<u>Příklad 1</u> (3.1b 162-uč): Je dána krychle. Porovnejte odchylky dvojic přímek AB, CE a BH, AD.





Mimoběžku AB posuneme do polohy CD.

$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \varphi_1 \doteq 54°44'8''$

Mimoběžku AD posuneme do polohy BC.

$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \varphi_2 \doteq 54°44'8''$

<u>Odchylky přímek AB, CE a BH, AD jsou stejné.</u>

<u>Příklad 2 (3.2 162-uč.)</u>: Je dána krychle ABCDEFGH se čtvercovou podstavou, jejíž hrana má délku a. Určete odchylku:

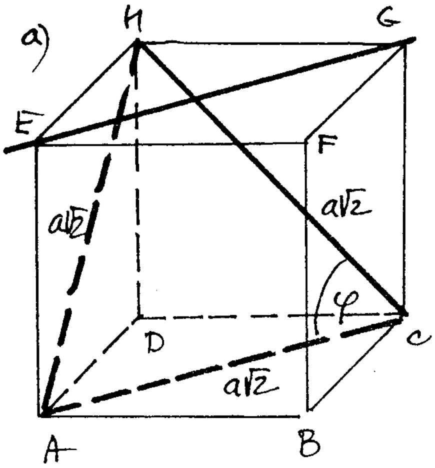
a) dvou stěnových úhlopříček,

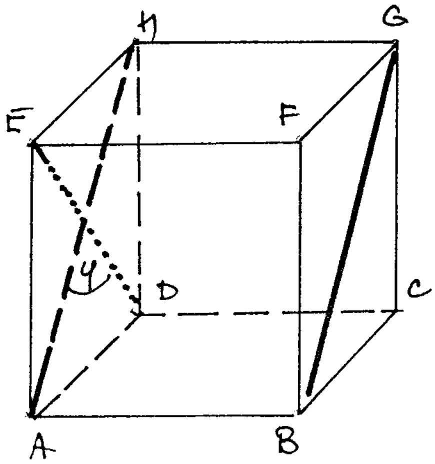
b) " tělesových "

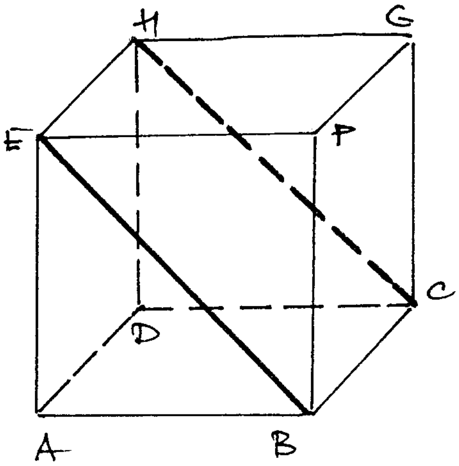
c) stěnové a tělesové úhlopříčky.

<u>Řešení</u> a) jsou tři možnosti.

a)







$\triangle ACH$ je rovnostranný

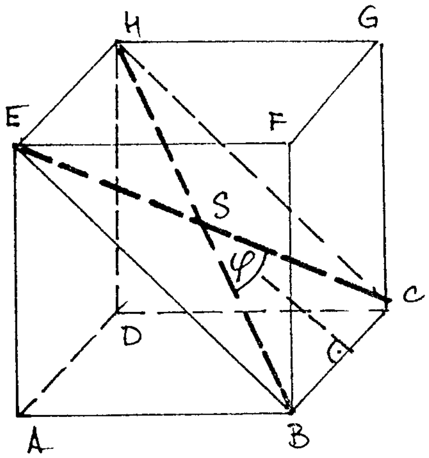
$\boxed{\varphi = 60°}$

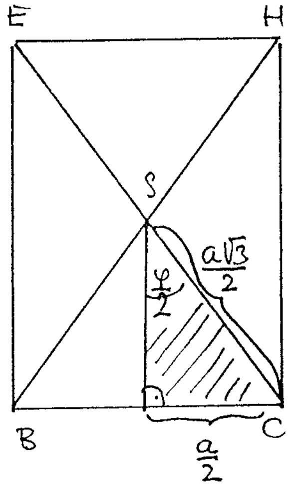
Úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé, $\boxed{\varphi = 90°}$.

$\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{HC}$

$\boxed{\varphi = 0°}$

Řešení b)



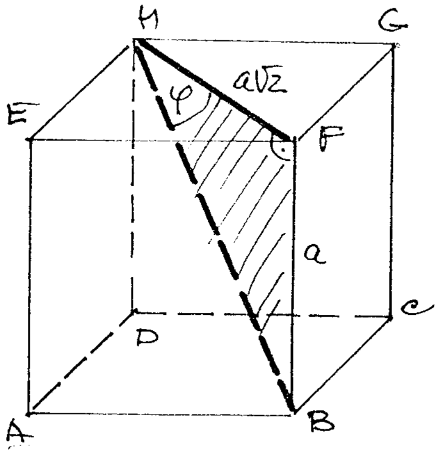


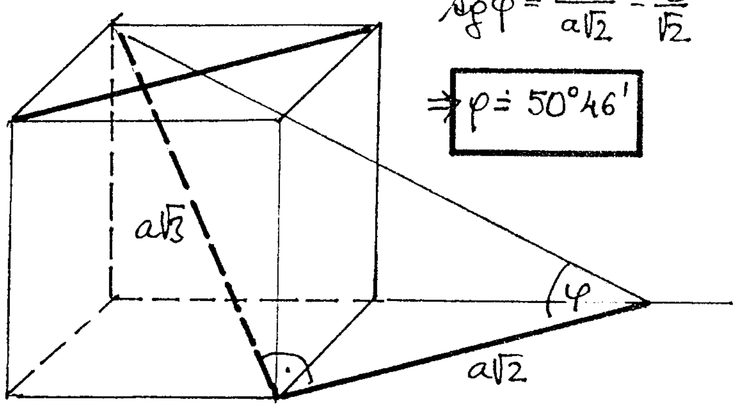
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} \doteq 35° 15' 51{,}8''$$

$$\boxed{\varphi \doteq 70° 32'}$$

Řešení c)





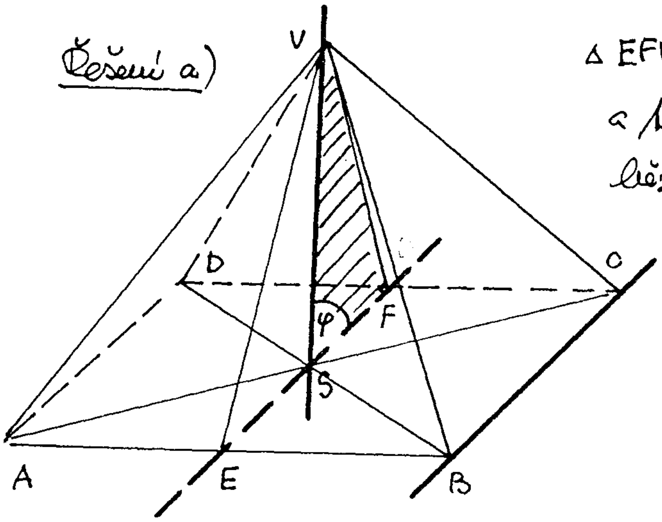
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 50° 46'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 35° 16'}$$

Příklad 3 (3.3a,b,e/62-uč.): Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, jehož boční stěny jsou rovnostranné △. Bod S je středem podstavy, bod P středem hrany AV. Určete odchylku přímek: a) BC, SV, b) AB, CV, c) (jako e) SV, BP.

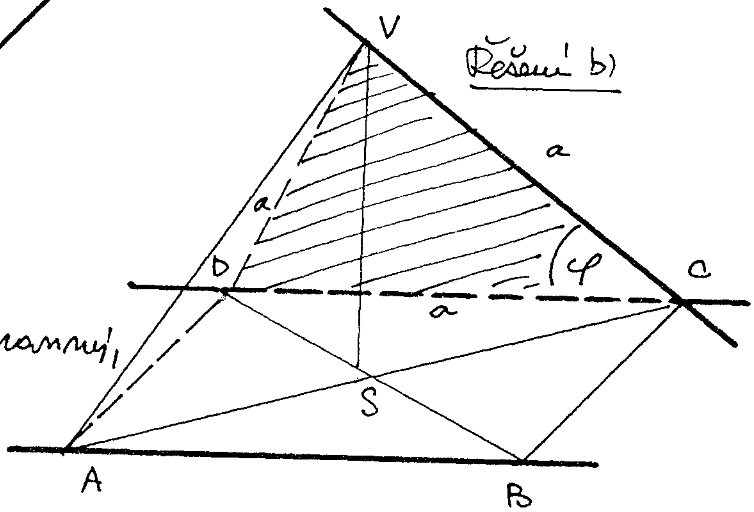
Řešení a)



△ EFV je rovnoramenný, VS je jeho výška, a ta je kolmá na základnu EF (mimoběžka BC posunuta do polohy EF).

$VS \perp \overleftrightarrow{EF} \Rightarrow \boxed{\varphi = 90^\circ}$

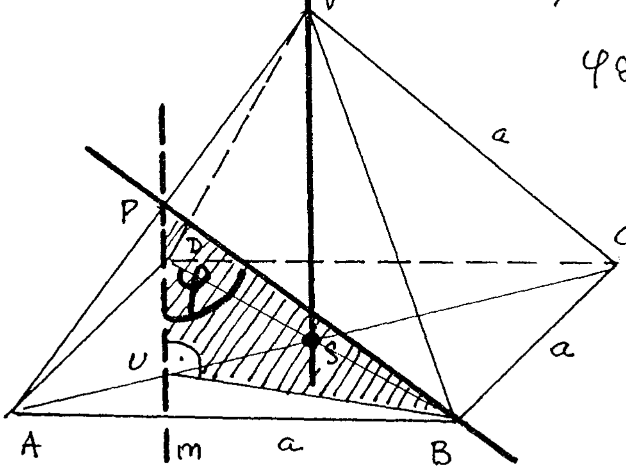
Řešení b)



(mimoběžka AB posunuta do polohy CD. △DCV je rovnostranný, $\Rightarrow \boxed{\varphi = 60^\circ}$.

Řešení c (v uč. je to e): Bodem P veďme přímku $m \parallel \overleftrightarrow{VS}$; PU jako úsečka je střední příčka △VAS.

φ je ostrý úhel v pravoúhlém △ BPU.



$|AC| = a\sqrt{2}$, $|CS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|CV| = a$

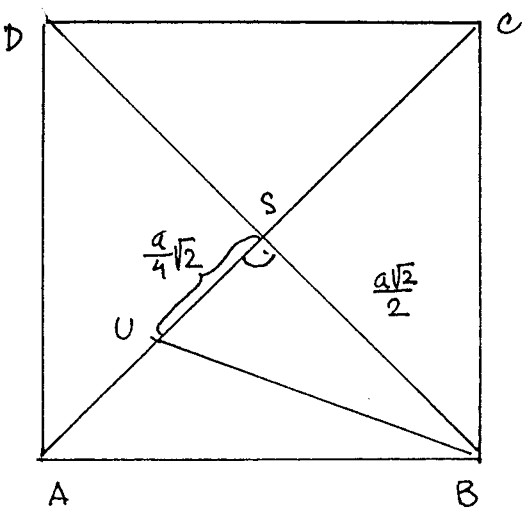
$$|VS| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - 2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \boxed{\frac{a\sqrt{2}}{2} = |VS|}$$

$$|PU| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{|PU| = \frac{a}{4}\sqrt{2}}$$

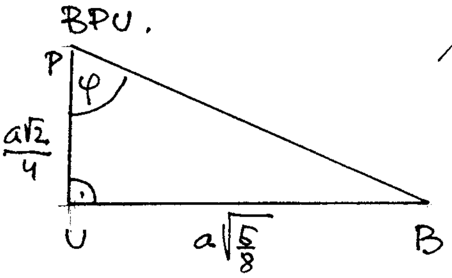
$|SU| = |AU| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Protože bod U je krajní bod střední příčky PU trojúhelníka VAS, tak bod U je středem úsečky AS.

Podle obr. na další str. platí:

$$|BU| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}a^2} \ldots \boxed{|BU| = a\sqrt{\frac{5}{8}}}$$



Velikost úhlu φ určíme z pravoúhlého Δ BPU.



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{\frac{5}{8}}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}}{\sqrt{2}}$$

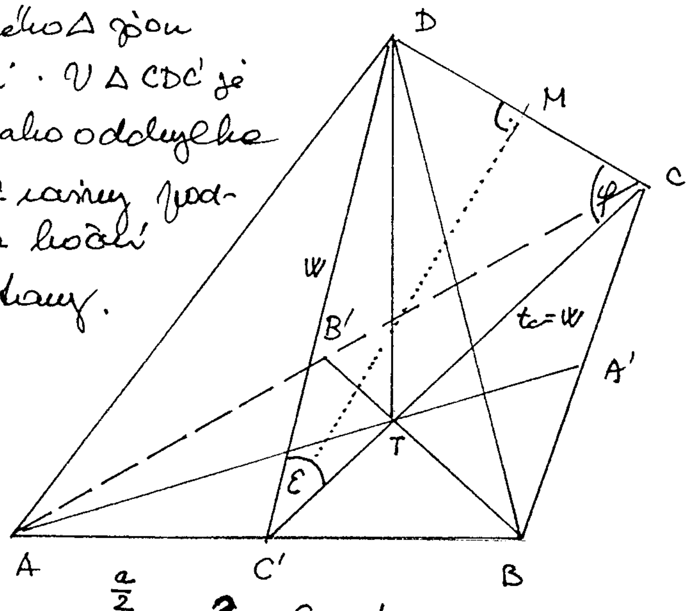
$$\operatorname{tg}\varphi = 4\cdot\sqrt{\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{1}}} = 4\cdot\sqrt{\frac{5}{16}} = 4\cdot\frac{1}{4}\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

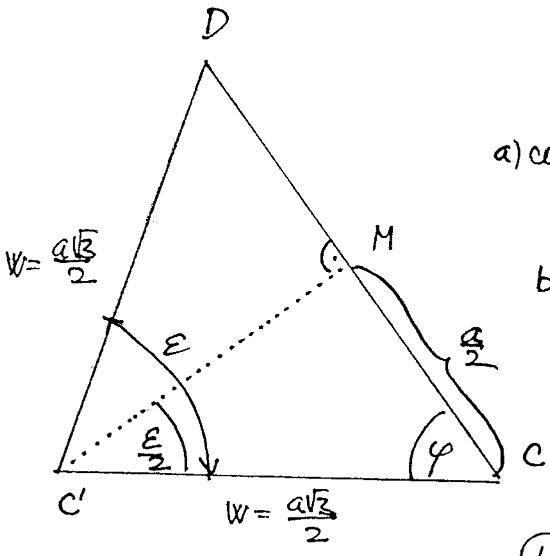
$$\Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 65°54'}$$

Příklad 4: Je dán pravidelný čtyřstěn s hranou délky $\underline{a}$. Vypočítejte
a) odchylku boční hrany od roviny podstavy,
b) odchylku boční stěny od roviny podstavy.

Řešení: Výšky rovnostranného Δ jsou zároveň těžnicemi. V Δ CDC' je je vyznačena φ jako odchylka boční hrany od roviny podstavy a ε jako odchylka boční stěny od roviny podstavy.

$t_c = w = \frac{a\sqrt{3}}{2}$





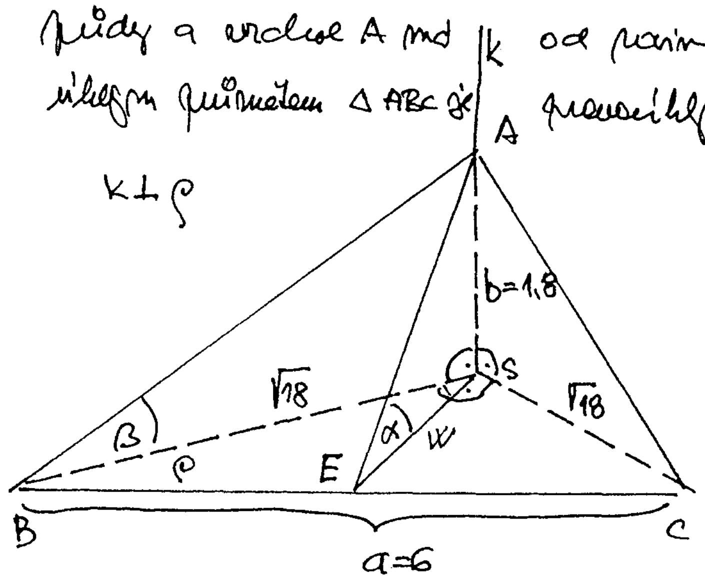
a) $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{a\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 54°44'}$

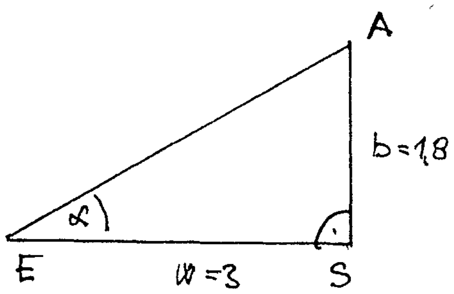
b) $\sin\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\varepsilon}{2} = 35°\,15'\,51{,}8''$

$$\boxed{\varepsilon = 70°\,32'}$$

Příklad 5: Jedna část střechy má tvar rovnoramenného $\triangle ABC$, $|BC| = a = 6$m je jeho základna. Ta leží ve vodorovné rovině ρ půdy a vrchol A má od roviny ρ vzdálenost $b = 1{,}8$m. Pravoúhlým průmětem $\triangle ABC$ je pravoúhlý rovnoramenný $\triangle$ s přeponou $\underline{a}$.

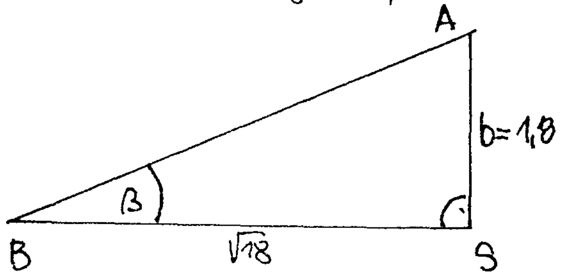
$k \perp \rho$





a) Určete sklon roviny ABC od roviny půdy.

b) " odchylku přímek AB (AC) od roviny půdy.

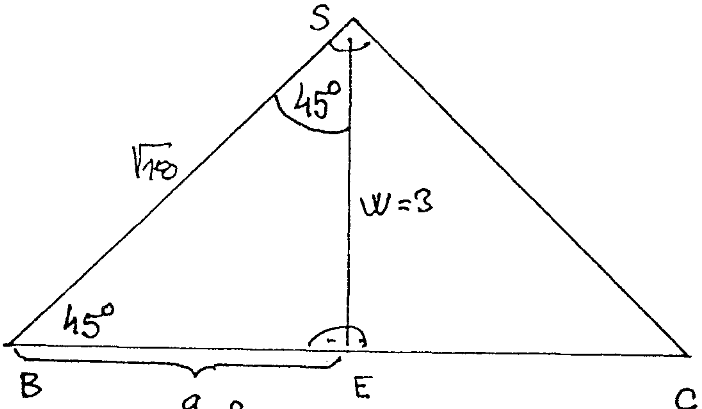


a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AS|}{|ES|} = \frac{b}{w} = \frac{1{,}8}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 30°58'}$

b) $\operatorname{tg}\beta = \frac{1{,}8}{\sqrt{18}}$

$\Rightarrow \boxed{\beta \doteq 22°59'}$



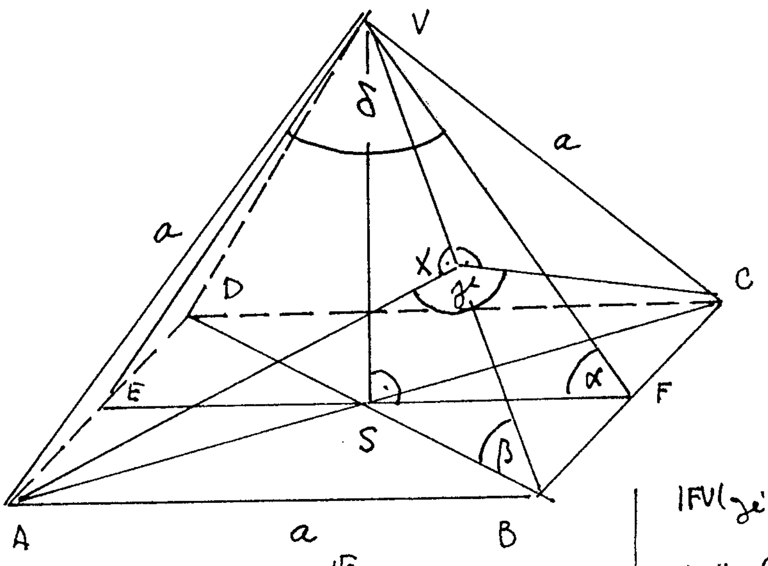
$|BS| = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

Příklad 6: V pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV, $|AB| = a$, $|AV| = a$. Určete odchylku

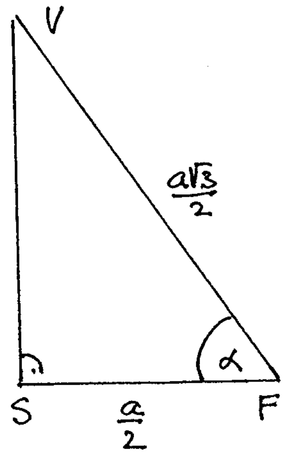
(a) roviny podstavy a roviny boční stěny,

(b) hrany BV od roviny podstavy, (c) sousedních bočních stěn,

(d) protilehlých bočních stěn, (e) vzdálenost B od přímky DV.



a)



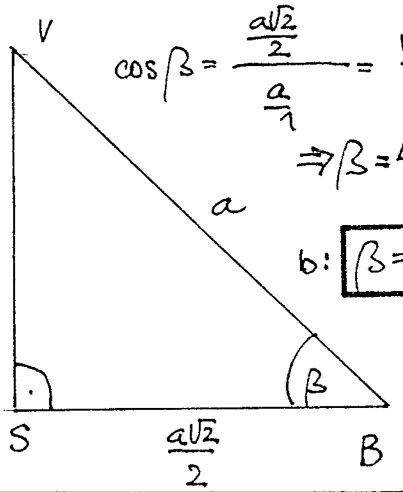
$|FV|$ je výška v rovnostranném $\triangle BCV$

$|FV| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\boxed{\alpha \doteq 54°44'}$

b)

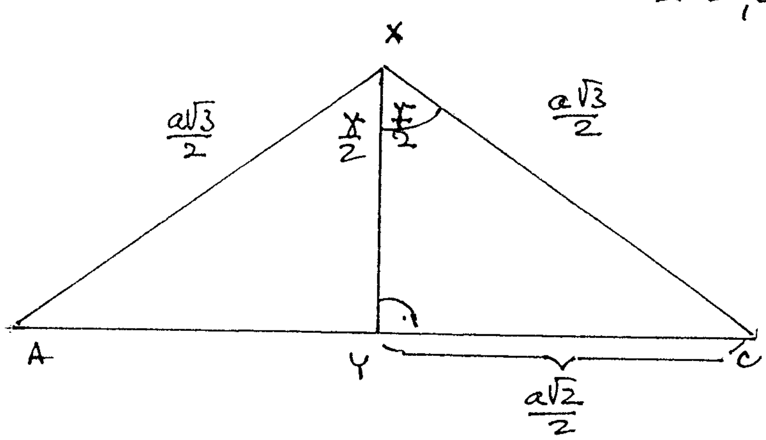


$\cos\beta = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \beta = 45°$

b: $\boxed{\beta = 45°}$

c) v $\triangle ACX$ je $|AX| = |CX| =$ výška v rovnostr. $\triangle ABV$, BCV



$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

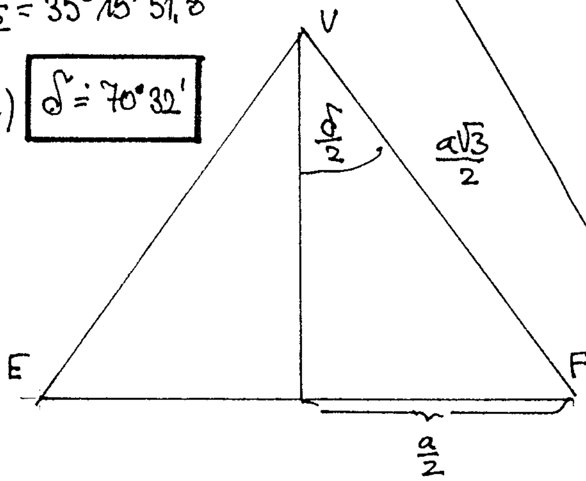
$\Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 54°\,44'\,8{,}2''$

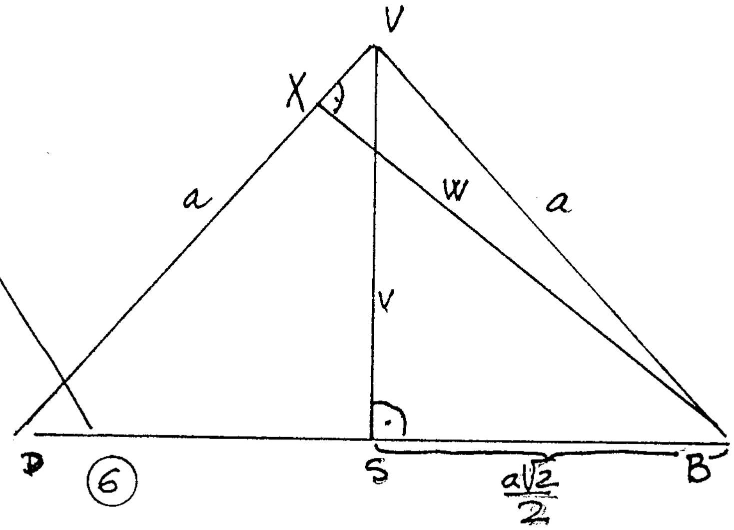
c): $\boxed{\gamma \doteq 109°28'}$

d) $\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{\delta}{2} = 35°15'\,51{,}8''$

d) $\boxed{\delta \doteq 70°32'}$





Podle předchozího obrázku: Vyjádříme obsah $\triangle DBV$ dvěma způsoby. Položíme jejich rovnost a ze získaného rovnice vypočítáme požadovanou vzdálenost $w=|BX|$.

$\triangle DBV$ je rovnoramenný.

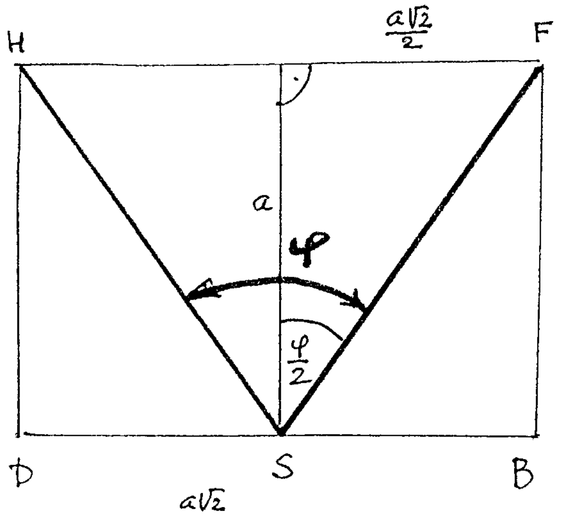
$$v=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt2}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\sqrt{\frac{4a^2-2a^2}{4}}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt2$$

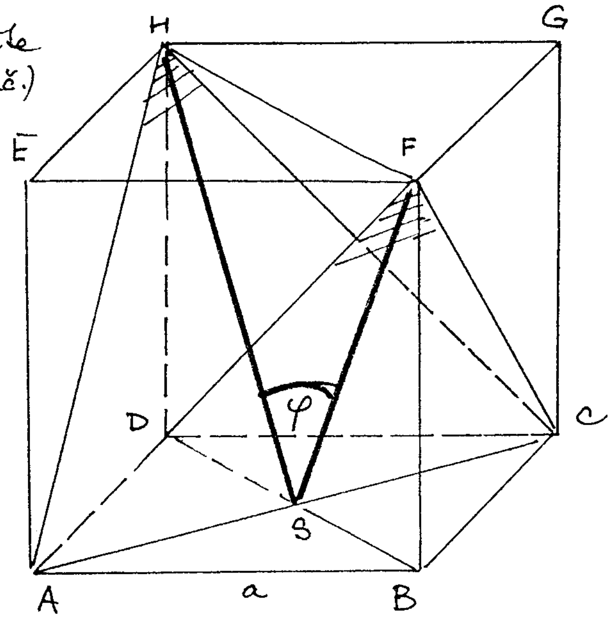
$$S_{1\,\triangle DBV}=\frac{a\cdot v}{2}=\frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt2}{2}=\frac{\frac{a^2\sqrt2}{2}}{\frac{2}{1}}=\frac{a^2\sqrt2}{4}$$

$$S_{2\,\triangle DBV}=\frac{|DV|\cdot w}{2}=\frac{a\cdot w}{2}$$

$$S_1=S_2 \;\dots\; \frac{a^2\sqrt2}{4}=\frac{a\cdot w}{2} \;\dots\!\Rightarrow\; w=\frac{2a^2\sqrt2}{4}\;\dots\; \boxed{|BX|=w=\frac{a}{2}\sqrt2}$$

Příklad 7: V krychli ABCDEFGH určete
a) odchylku rovin ACF a ACH (3.28a/82 uč.)





$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{a\sqrt2}{2}}{\frac{a}{1}}=\frac{a\sqrt2}{2a}=\frac{\sqrt2}{2}\Rightarrow \frac{\varphi}{2}\doteq 35°\,15'\,51{,}8'' \;\dots\; \boxed{\varphi\doteq 70°32'}$$

---

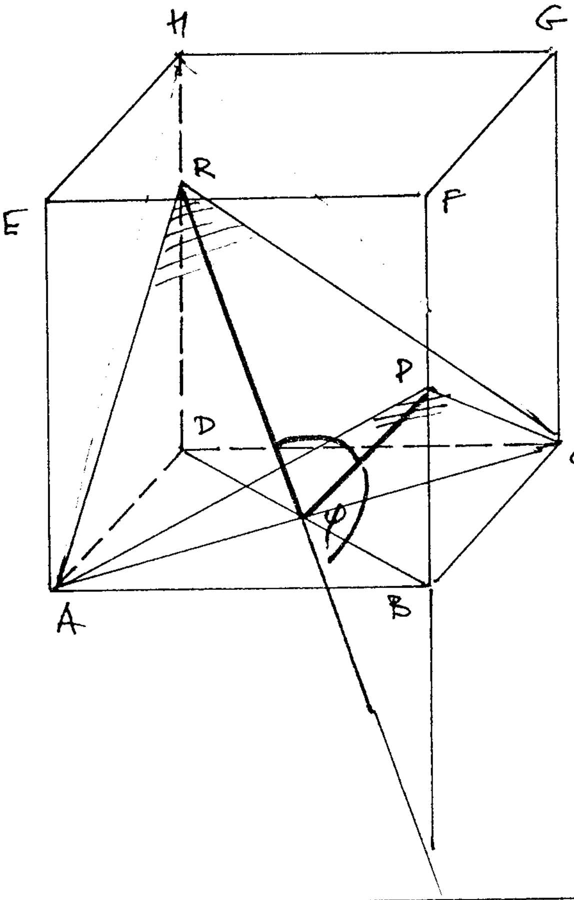
b) odchylku rovin ACP a ACR, kde P je střed hrany BF a $R\in DH \wedge$ $\wedge\ |HR|=\frac{1}{3}|DH|$ (3.28d/82 uč.)

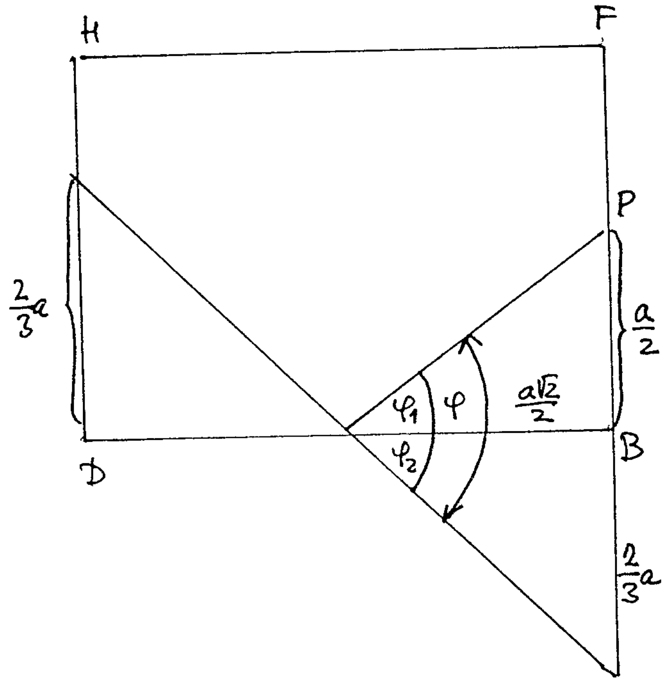
Řešení je na další straně; úhel φ musí být menší než 90° nebo roven 90°.

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt2}{2}}=\frac{2a}{2a\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}\Rightarrow \varphi_1=35°\,15'\,51{,}8''$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\frac{2a}{3}}{\frac{a\sqrt2}{2}}=\frac{4a}{3a\sqrt2}=\frac{4}{3\sqrt2}\Rightarrow \varphi_2=43°18'49{,}88''$$

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2 \;\dots\; \boxed{\varphi\doteq 78°35'}$$





Příklad 18: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV s podstavnou hranou délky $\underline{a}$ a tělesovou výškou $\underline{v}$. Vypočítejte vzdálenost bodu B od roviny boční stěny CDV.

Řešení: Vzdálenost bodu B od $\overleftrightarrow{CDV}$ je stejná jako vzdálenost bodu X od $\overleftrightarrow{CDV}$ (oba body leží na přímce p ; $p \parallel \overleftrightarrow{CDV}$)

$\triangle YVS \sim \triangle YXX'$ (uu) $\Rightarrow \dfrac{|XX'|}{|SV|} = \dfrac{|XY|}{|VY|}$

$$\frac{|XX'|}{v} = \frac{a}{|VY|}$$

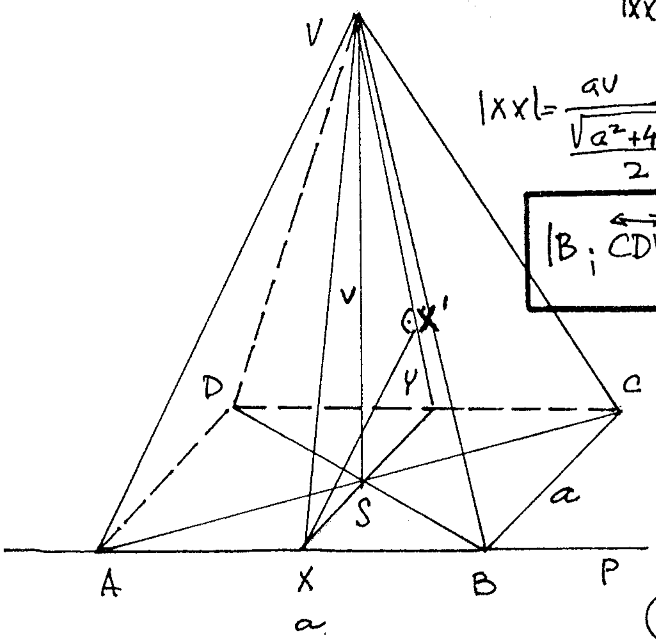
$$|VY| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2} = \sqrt{\frac{a^2+4v^2}{4}} =$$

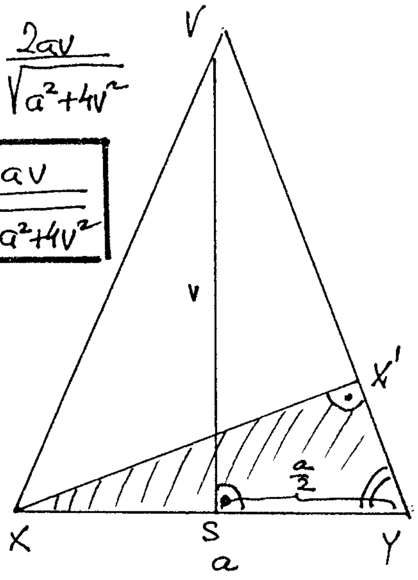
$$|VY| = \frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{2}$$

$$|XX'| = \frac{av}{|VY|}$$

$$|XX'| = \frac{av}{\frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{2}} = \frac{2av}{\sqrt{a^2+4v^2}}$$

$$\boxed{|B ; \overleftrightarrow{CDV}| = \frac{2av}{\sqrt{a^2+4v^2}}}$$



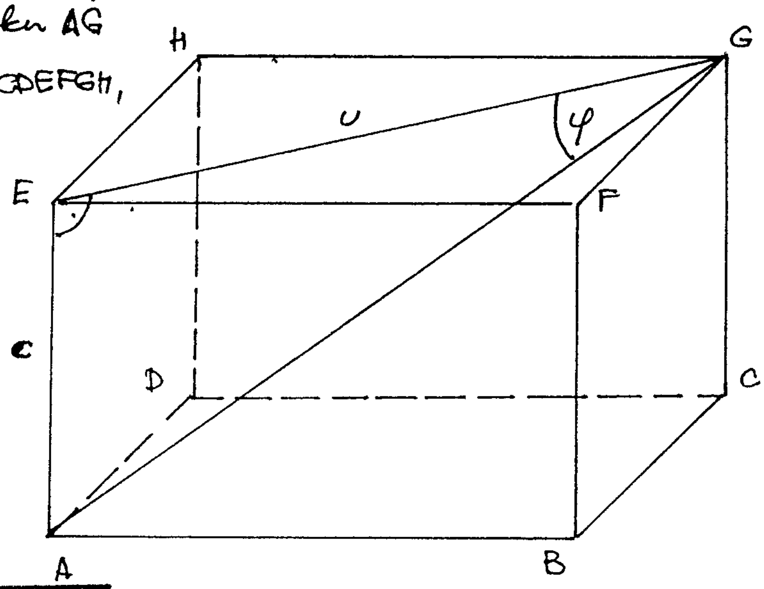


Příklad 9: Určete odchylku $\overleftrightarrow{AG}$ od roviny EFG kvádru ABCDEFGH, je-li $|AB| = a = 7\,cm$, $|BC| = b = 6\,cm$, $|CG| = c = 4{,}5\,cm$.

Označme $|EG| = v$

$v = \sqrt{a^2 + b^2}$

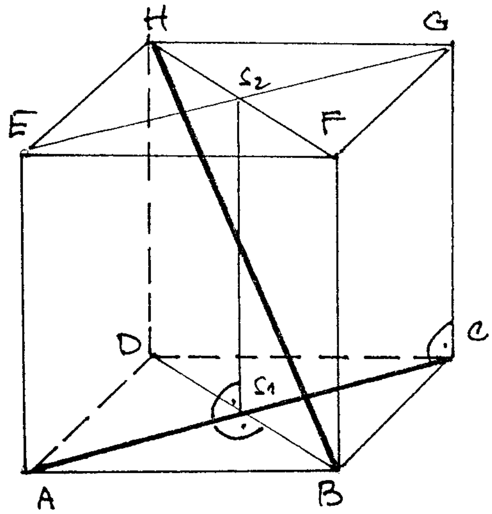
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{c}{v} = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{4{,}5}{\sqrt{7^2+6^2}} = \dfrac{4{,}5}{\sqrt{85}} \Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 78°25'}$



Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.
" " " , k " přímce " kolmou rovinu.

Dvě roviny jsou k sobě kolmé, právě když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.
Přímka a rovina jsou k sobě kolmé, právě když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny. Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.

Příklad 10: Je dána krychle ABCDEFGH. Je pravda, že stěnová úhlopříčka AC je kolmá k tělesové úhlopříčce BH. Svou odpověď zdůvodněte.



Řešení = zdůvodnění:

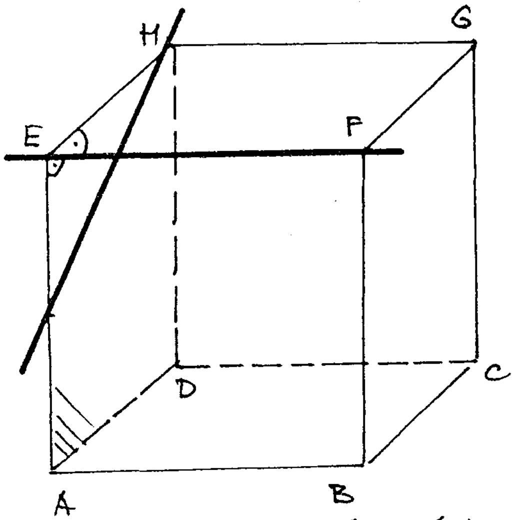
$\overleftrightarrow{BH} \subset \overleftrightarrow{DBF}$. Musíme dokázat, že přímka AC je kolmá ke 2 přímkám $\overleftrightarrow{DBF}$

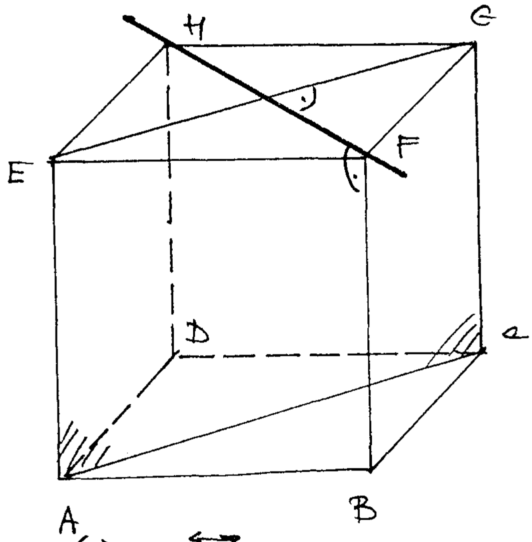
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CG}\ ;\ \overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{S_1S_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BH}$$

Příklad 11 (3.10 a,d /72-uč.): Je dána krychle ABCDEFGH. Ověřte, že

a) $\overleftrightarrow{HM} \perp \overleftrightarrow{EF}$, M je střed AE,

b) (jako d) $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{ACG}$





a) $\overleftrightarrow{HM} \perp \overleftrightarrow{EF}$, neboť $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{HEA}$ ($\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{EH} \wedge \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AE}$). Přímka HM leží v rovině HEA, k níž je $\overleftrightarrow{EF}$ kolmá...

b) $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{EG}$

$\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{BF} \wedge \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CG} \Rightarrow$

$\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{CG}$

Přímka FH je kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny ACG, proto platí též $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{ACG}$

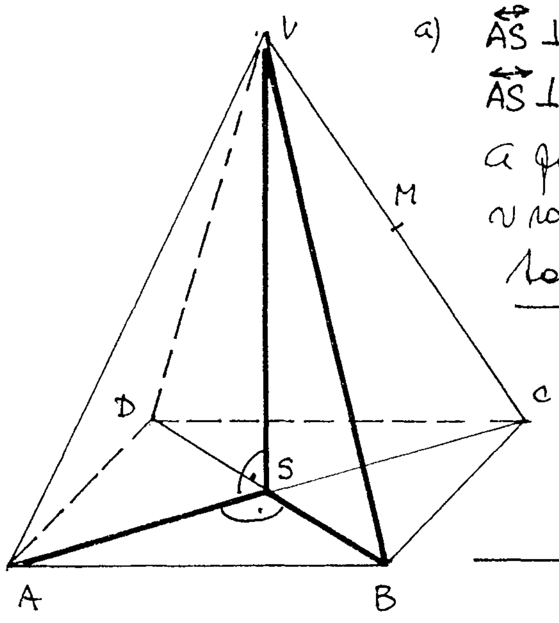
Příklad 12 (3.11/72)-uč). Bod M je středem hrany CV pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV. Ověřte, zda platí:

a) $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BV}$?

b) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$?

c) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CDV}$?

d) $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BDV}$?



a) $\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AS} \perp \overleftrightarrow{BS} \\ \overleftrightarrow{AS} \perp \overleftrightarrow{VS}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AS} \perp \overleftrightarrow{BVS}$

a protože $\overleftrightarrow{BV}$ leží v rovině kolmé k $\overleftrightarrow{AS}$, tak zároveň $\boxed{\text{platí } \overleftrightarrow{AS} \perp \overleftrightarrow{BV}}$

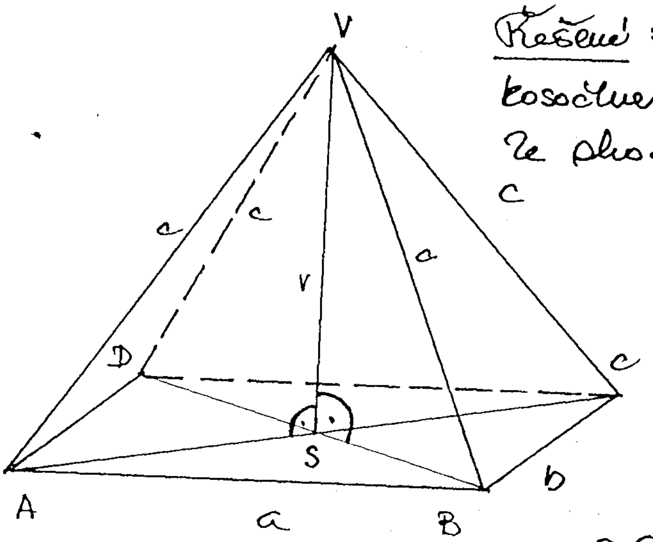
b) Protože $\overleftrightarrow{BM}$ není kolmá ani k přímce VC ani k přímce DV, tak neplatí, že $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{DCV}$ a tedy $\boxed{\text{neplatí } \overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}}$.

c) Protože $\overleftrightarrow{AD}$ je kolmá jen k jediné přímce roviny CDV ($\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$), tak $\boxed{\text{neplatí } \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CDV}}$

---

d) $\boxed{\text{neplatí } \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BDV}}$, neboť nelze najít v $\overleftrightarrow{BDV}$ dvě různoběžky kolmé k $\overleftrightarrow{AM}$.

<u>Příklad 13 (3.12/172) uč</u>: Podstavou jehlanu ABCDV je rovnoběžník ABCD se středem S. Boční hrany jehlanu mají stejnou délku. Dokažte, že přímka VS je kolmá k rovině podstavy.



<u>Řešení</u>: Podstavou může být čtverec, kosočtverec, obdélník, nebo kosodélník. Ze shodnosti bočních hran vyplývá.

$\triangle$ ACV je rovnoramenný, proto VS je jeho výška $\underline{v}$.

$\overleftrightarrow{VS} \perp \overleftrightarrow{AC}$ (1)

Obdobně $\triangle$ DBV je rovnoramenný

$\overleftrightarrow{VS} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (2)

Z (1) a (2) $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{VS} \perp$ k rovině podstavy