8b) METRICKÉ VLASTNOSTI LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ

1) V ROVINĚ

Příklad 1: Vypočítejte vzdálenost bodu B[3;-7] od přímky p dané obecnou rovnicí $4x-3y+7=0$.

Řešení: $B[3;-7]$ ($x_0 = 3$, $y_0 = -7$) $\qquad p: 4x-3y+7=0$ ($a = 4$, $b = -3$, $c = 7$)

$$|B;p| = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4.3-3.(-7)+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|12+21+7|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|40|}{5} = \boxed{8}$$

Příklad 2: Vypočítejte vzdálenost bodu A[1;3] od přímky s parametrickým vyjádřením $x=1-3t$, $y=-2+4t$, $t\in R$.

Řešení: Přímku vyjádříme v obecném tvaru a pak použijeme výše uvedený vzorec.

$$x = 1-3t \quad |\cdot 4$$
$$y = -2+4t \quad |\cdot 3$$
$$4x = 4-12t$$
$$3y = -6+12t$$
$$p: 4x+3y+2=0$$
($a = 4$, $b = 3$, $c = 2$)

$A[1;3]$ ($x_0 = 1$, $y_0 = 3$)

$$|A;p| = \frac{|4.1+3.3+2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|4+9+2|}{\sqrt{25}} = \frac{|15|}{5} = \boxed{3}$$

Řešení dané úlohy je možné provést bez vzorce.

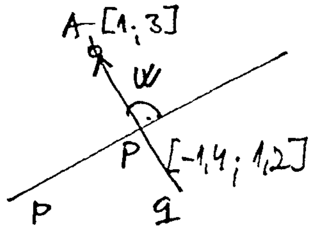
$p: x = 1-3t$
$\quad y = -2+4t$

Směrový vektor $\vec{v}_p$ přímky p je $\vec{v}_p=(-3;4)$, ten je možné převést na $\vec{n}_q=(4;3)$, což je zároveň směrový vektor přímky q, která prochází bodem A.

$$q: x = 1+4s \quad |\cdot(-3)$$
$$y = 3+3s \quad |\cdot 4$$
$$-3x = -3-12s$$
$$4y = 12+12s$$
$$\boxed{q: -3x+4y-9=0}$$

$\boxed{p: 4x+3y+2}$ ten už je nahoře.

Máme $p \cap q = \{P\}$



$$4x+3y+2=0 \quad |\cdot 3$$
$$-3x+4y-9=0 \quad |\cdot 4$$
$$12x+9y+6=0$$
$$-12x+16y-36=0$$
$$25y=30$$
$$\boxed{y=\frac{6}{5}}$$

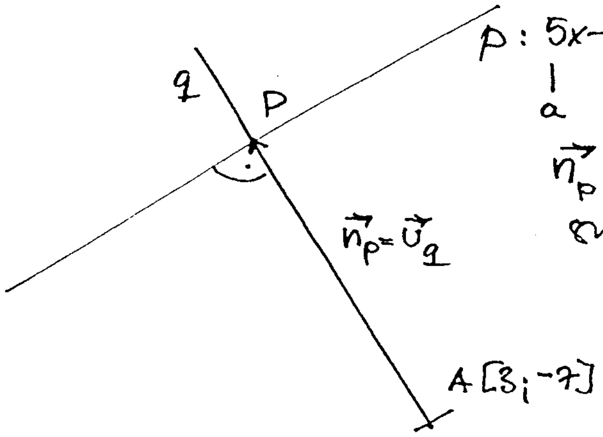
$$4x+3\cdot\frac{6}{5}+2=0$$
$$4x=-\frac{28}{5}$$
$$\boxed{x=-\frac{7}{5}}$$

$$P\left[-\frac{7}{5};\frac{6}{5}\right] \ldots P[-1{,}4;1{,}2]$$

$$\vec{w}=A-P=(2{,}4;1{,}8)$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{2{,}4^2+1{,}8^2}=\sqrt{9}=\boxed{3}$$

Příklad 3: Vypočítejte souřadnice paty kolmice vedené bodem A k přímce p, je-li $A[3;-7]$, $p: 5x-6y+4=0$.



$p: 5x-6y+4=0$ ($a=5$, $b=-6$)

$\vec{n}_p=(5;-6)$, tento vektor je zároveň směrovým vektorem přímky q (tj. $\vec{u}_q$).

$$\vec{n}_p=\vec{u}_q=(5;-6)$$

$$q:\ x=3+5t \quad |\cdot 6$$
$$y=-7-6t \quad |\cdot 5$$
$$6x=18+30t$$
$$5y=-35-30t$$
$$6x+5y+17=0$$

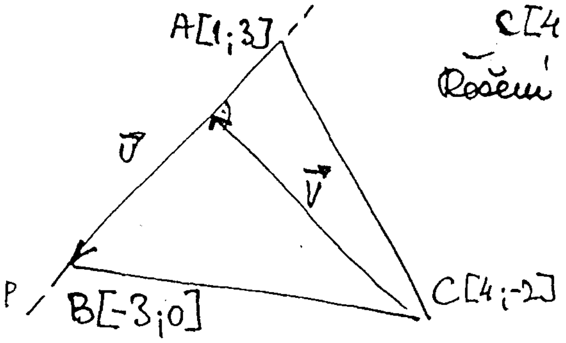
$$p\cap q=\{P\}$$

$$5x-6y+4=0$$
$$6x+5y+17=0$$
$$-30x+36y-24=0$$
$$30x+25y+85=0$$
$$61y=-61$$
$$\boxed{y=-1}$$

$$6x+5\cdot(-1)+17=0$$
$$6x-5+17=0$$
$$6x=-12$$
$$\boxed{x=-2}$$

$$\boxed{P[-2;-1]}$$

Příklad 4: Vypočítejte výšku v_c v ΔABC, ve kterém je $A[1;3]$, $B[-3;0]$, $C[4;-2]$.



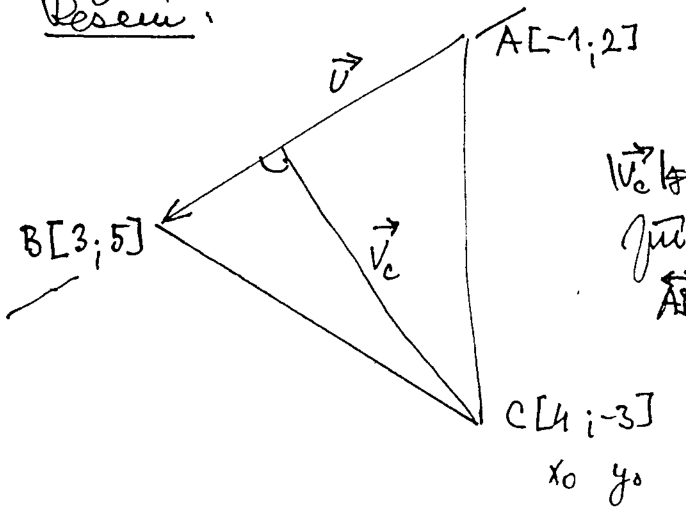
Řešení: $\vec{u}=B-A=(-4;-3)$

$$p:\ x=1-4t \quad |\cdot 3$$
$$y=3-3t \quad |\cdot(-4)$$
$$\boxed{3x-4y+9=0}$$
(a, b, c)

$$|C;\overleftrightarrow{AB}|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3.4-4.(-2)+9|}{\sqrt{9+16}}=\frac{29}{5}=\boxed{5{,}8}$$

Příklad 5: Vypočítejte obsah $\triangle ABC$, je-li $A[-1;2]$, $B[3;5]$, $C[4;-3]$

Řešení:



Určíme délky vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v_c}$.

$\vec{u} = B - A = (4;3)$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{16+9} = 5$

$|\vec{v_c}|$ je vzdálenost bodu C od přímky AB. Proto určíme rovnici

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{aligned} x &= -1 + 4t \quad | \cdot(-3) \\ y &= 2 + 3t \quad | \cdot 4 \end{aligned}$$

$$-3x = 3 - 12t$$
$$4y = 8 + 12t$$

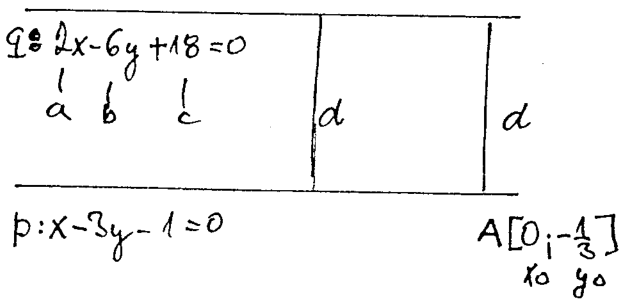
$$\underset{a}{-3}x + \underset{b}{4}y \underset{c}{-11} = 0$$

$$|v_c| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|v_c| = \frac{|-3.4 + 4.(-3) - 11|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-12-12-11|}{5} = \frac{35}{5} = 7 \longrightarrow |\vec{v_c}| = 7$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v_c}|}{2} = \frac{5.7}{2} = \frac{35}{2} = \boxed{17{,}5}$$

Příklad 6: Vypočítejte obsah čtverce, jehož protější strany leží na přímkách daných rovnicemi: $2x - 6y + 18 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$.



Na jednu z přímek určíme jeden bod A tak, že x zvolíme a y vypočítáme: $x=0$

$$x - 3y - 1 = 0$$
$$-3y = 1$$
$$y = -\frac{1}{3}$$

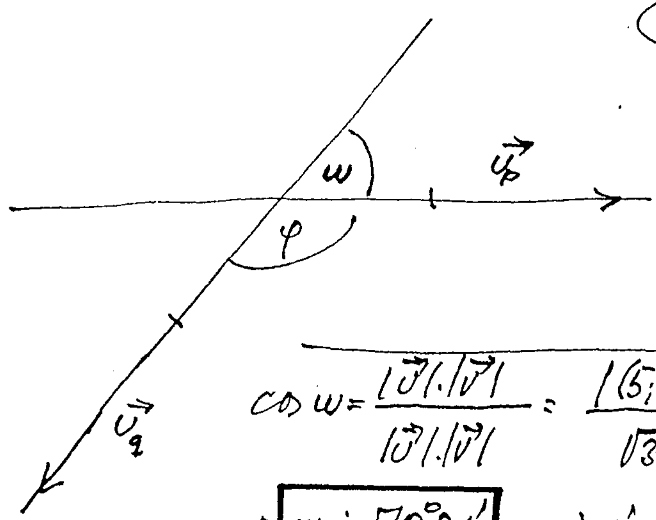
$$d = |A;q| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|2.0 - 6.(-\frac{1}{3}) + 18|}{\sqrt{2^2+6^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{40}} =$$

$$d = \frac{20}{\sqrt{40}} \quad \dots \quad S_\square = d^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{40}}\right)^2 = \frac{400}{40} = \boxed{10}$$

Příklad 7: Určete odchylku přímek $p: -3x-5y+6=0$, $q: 5x-y+2=0$

Řešení: $\vec{n}_p=(-3;-5) \dots \vec{u}_p=(5;-3)$, $|\vec{u}_p|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

$\vec{n}_q=(5;-1) \dots \vec{u}_q=(1;5)$, $|\vec{u}_q|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$



Podle Odvárka – **rozliš** (ale není třeba)

$\cos w=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ je odch. vektorů (A)

$\cos\varphi=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ je odch. přímek (B)

$$\cos w=\frac{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|(5;-3)\cdot(1;5)|}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{26}}=\frac{|5-15|}{\sqrt{884}}=\frac{10}{\sqrt{884}}$$

$\Rightarrow \boxed{w \doteq 70°21'}$, což je odchylka přímek

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(5;-3)\cdot(1;5)}{\sqrt{884}}=\frac{5-15}{\sqrt{884}} \Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 109°39'}$$, což je odchylka vektorů.

POZNÁMKA: 1) Odchylka přímek je v intervalu $\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$, $\langle 0°;90°\rangle$

" vektorů $\langle 0;\pi\rangle$

V učebnici to rozlišeno není. Stačí použít vzorec (A) a v případě přímek jej lze odečíst od 180°...

Příklad 8: Vypočtěte odchylku přímek p, q:

$p: x=1+t$, $y=2+3t$, $\vec{u}_p=(1;3)$

$q: 2x+y-1=0$, $\vec{n}_q=(2;1)$, $\vec{u}_q=(-1;2)$

$|\vec{u}_p|=\sqrt{10}$, $|\vec{u}_q|=\sqrt{5}$

$$\cos\varphi=\frac{|(1;3)\cdot(-1;2)|}{\sqrt{10}\,\sqrt{5}}=\frac{|-1+6|}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt{50}} \Rightarrow \boxed{\varphi=45°}$$

Příklad 9: Jsou dány body A[-2;3], B[5;-1]. Napište param., obecnou rovnici přímky AB a její směrnicový tvar.

$\vec{u} = B - A = (7;-4)$

$\vec{n} = (4;7)$
$\quad\quad\;\; a \;\; b$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -2 + 7t \\ y &= 3 - 4t \end{aligned}}$$

$ax + by + c = 0$

$4x + 7y + c = 0$, dosaď A

$4(-2) + 7 \cdot 3 + c = 0$

$-8 + 21 + c = 0$

$c = -13$

$$\boxed{4x + 7y - 13 = 0}$$

$7y = -4x + 13 \quad |:7$

$$\boxed{y = -\frac{4}{7}x + \frac{13}{7}}$$

Příklad 10: Napište směrnicový a úsekový tvar rovnice přímky, která prochází bodem M[2;2] a má stejnou směrnici jako přímka z příkladu 9.

$y = -\frac{4}{7}x + c$, dosaď M

$2 = -\frac{4}{7} \cdot 2 + c$

$c = \frac{22}{7}$

$$\boxed{y = -\frac{4}{7}x + \frac{22}{7}}$$

Úsekový tvar musí mít na pravé straně číslo 1.

$y = -\frac{4}{7}x + \frac{22}{7}$

$y + \frac{4}{7}x = \frac{22}{7} \quad \Big| \cdot \frac{7}{22}$

$\frac{4}{7}x + \frac{y}{1} = \frac{22}{7}$

$$\boxed{\frac{2}{11}x + \frac{7}{22}y = 1}$$

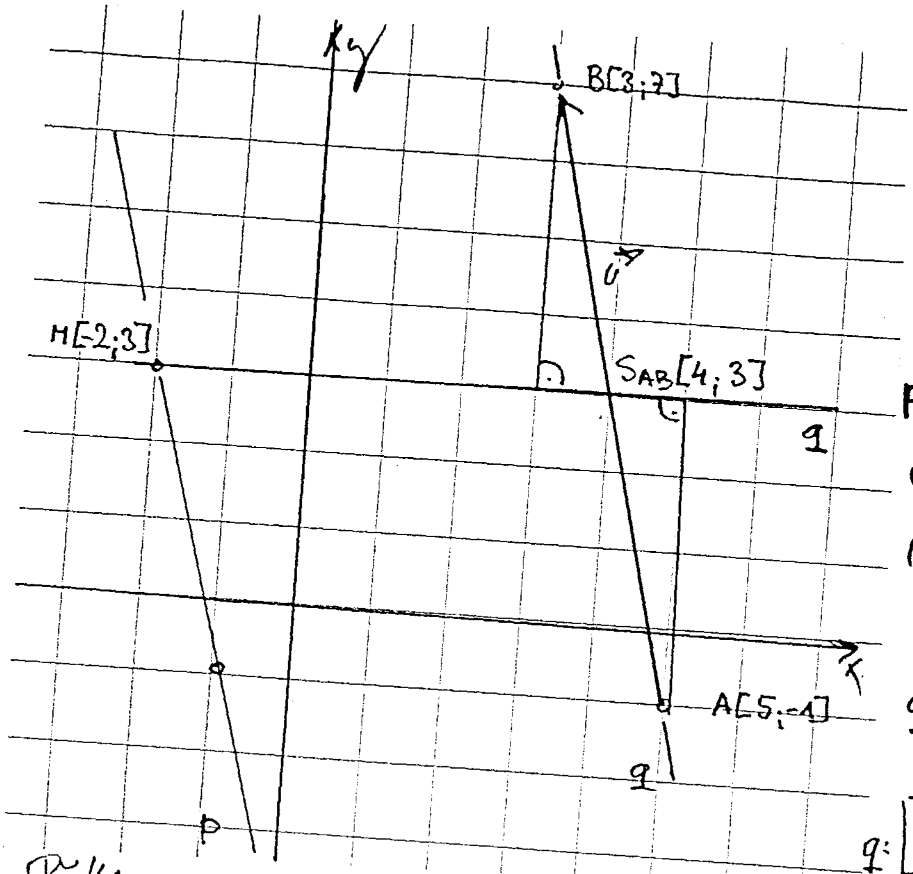
$\frac{2}{11}, \frac{7}{22}$ úseky na osách

Příklad 11: Bodem M[-2;3] veďte všechny přímky stejně vzdálené od bodů A[5;-1], B[3;7]. Vyjádřete je v obecném tvaru.

Řešení: nutno nakreslit obrázek na další straně.

Přímka p, což je jedno z řešení, musí být rovnoběžná s přímkou AB; přímka má směrový vektor $\vec{u} = B - A$.

$\vec{u} = B - A = (-2;8) \quad : \; x = -2 - 2t, \; y = 3 + 8t$



$x = -2 - 2t$ 1.4

$y = 3 + 8t$

$4x = -8 - 8t$

$y = 3 + 8t$

$p: \boxed{4x + y + 5 = 0}$

Přímka q, což je 2. řešení, musí procházet S_{AB}.

$\vec{v} = S_{AB} - M = (6;0)$

$q: x = -2 + 6t$

$y = 3 + 0t$

$q: \boxed{y - 3 = 0}$

Příklad 12: Napište parametrické rovnice přímky

$$p: \underset{a}{3}x - \underset{b}{2}y + 1 = 0$$

$\vec{n}_p = (3;-2)$, $\vec{u}_p = (2;3)$

Zvolíme souřadnici x jednoho bodu přímky p a napočítáme souřadnici y; např. pro $x = -1$ je:

$$\left.\begin{aligned} 3\cdot(-1) - 2y + 1 &= 0 \\ -3 - 2y + 1 &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\} P[-1;-1]$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= -1 + 3t \end{aligned}\right\} t \in R}$$

Příklad 13: Určete odchylku přímek $p: -2x + 5y + 1 = 0$ a $\overleftrightarrow{AB}$, kde $A[2;-3]$, $B[1;-5]$.

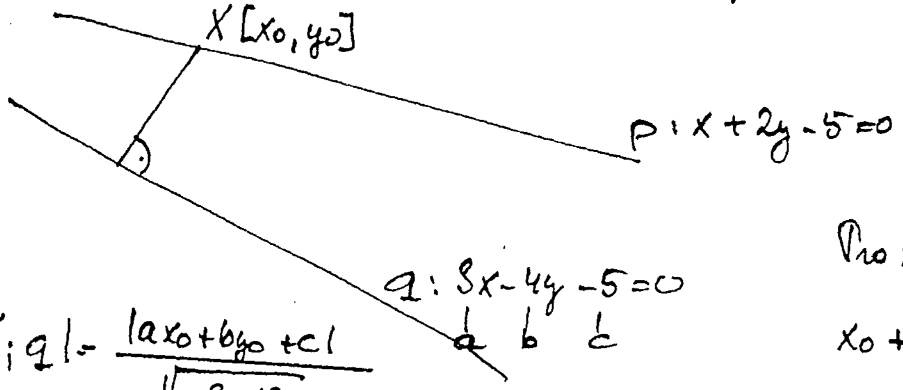
$\vec{v}_{AB} = B - A = (-1;-2)$, $\vec{n}_p = (-2;+5)$, $\vec{u}_p = (5;2)$, $|\vec{u}_p| = \sqrt{29}$

$|\vec{v}| = \sqrt{5}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|(5;2)\cdot(-1;-2)|}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}} = \frac{|-5-4|}{\sqrt{145}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{145}} \Rightarrow \boxed{\varphi \doteq 41^\circ 38'}$$

Příklad 14: Na přímce $p: x+2y-5=0$ najděte takový bod X, aby byl 2cm vzdálen od přímky $q: 3x-4y-5=0$



Pro x_0 je

$x_0 + 2y_0 - 5 = 0$

$2y_0 = -x_0 + 5$

$\boxed{y_0 = -\frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2}}$

$$|X;q| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$2 = \frac{|3x_0 - 4(-\frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{2}) - 5}{\sqrt{9+16}}$$

$$2 = \frac{|3x_0 + 2x_0 - 10 - 5|}{5}$$

$10 = |5x_0 - 15|$

a) Pro $5x_0 - 15 \geq 0$ je

$5x_0 - 15 = 10$

$5x_0 = 25$

$x_0 = 5$

$y_0 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{5}{2}$

$y_0 = 0$

$X_1[5;0]$

Pro $5x_0 - 15 < 0$

$-5x_0 + 15 = 10$

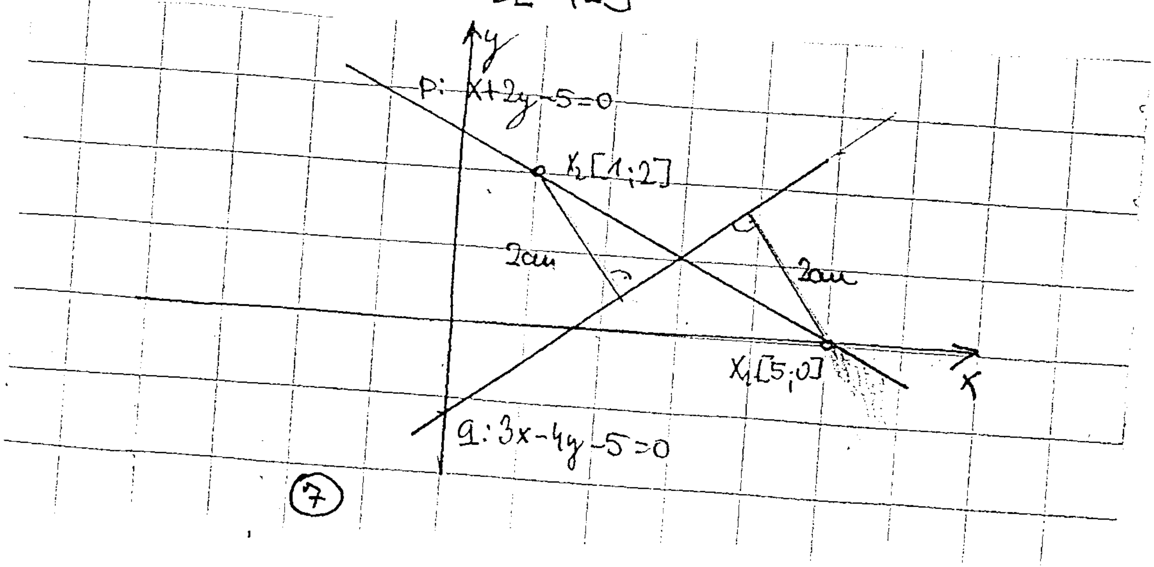
$-5x_0 = -5$

$x_0 = 1$

$y_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5}{2}$

$y_0 = 2$

$X_2[1;2]$



7

Příklad 15: Přímka prochází bodem A[3;4] a svírá s osou x úhel $\alpha = 30°$. Napište její směrnicový tvar.

$y = kx + q$ $\qquad \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = k$

$4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + q$

$q = 4 - \sqrt{3}$

$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 - \sqrt{3}}$

Příklad 16: Napište rovnici přímky, která prochází bodem A[6;1] a je kolmá k přímce dané rovnicí $y = 2x+1$.

$k = 2; \ -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$

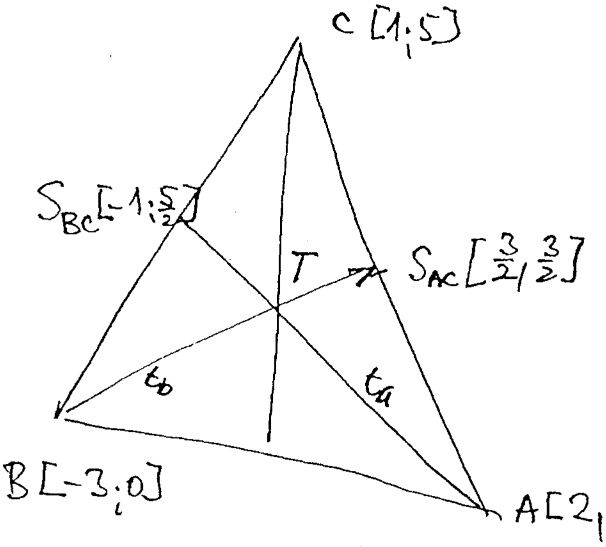
$y = kx + q$

$1 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + q$

$q = 4$

$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 4}$

Příklad 17: Jsou dány body A[2;−2], B[3;0], C[1;5]. Vypočítejte souřadnice těžiště T.



$\vec{t_a} = S_{BC} - A = (-3; 4{,}5)$

K souřadnicím bodu A přičteme souřadnice $\frac{2}{3}\vec{t_a}$.

$\frac{2}{3}\vec{t_a} = \frac{2}{3} \cdot (-3; 4{,}5) = (-2; 3)$

$T[2-2; -2+3] \ldots \boxed{T[0;1]}$

Příklad 18: Je dána přímka $r: y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$. Napište rovnici přímky m, která prochází průsečíkem P přímek $p: x - 2y + 5 = 0$, $q: 5x + 3y - 1 = 0$ a pro kterou platí:
a) $m \parallel r$; b) $m \perp r$.

$x - 2y + 5 = 0 \quad | \cdot (-5)$

$5x + 3y - 1 = 0$

$-5x + 10y - 25 = 0$

$5x + 3y - 1 = 0$

$13y = 26$

$\boxed{y = 2}$

$x - 2 \cdot 2 + 5 = 0$

$\boxed{x = -1}$

$p \cap q = \{P\}; P[-1; 2]$

a) $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}x + q$, dosaď P

$2 = \frac{3}{4} \cdot (-1) + q$

$q = \frac{11}{4}$

$\boxed{m: y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}} \quad | \cdot 4$

$4y = 3x + 11$

$\boxed{3x - 4y + 11 = 0}$

rovnice přímky m

b) $k' = -\frac{4}{3}$

$y = -\frac{4}{3}x + q$, dosaď P

$2 = -\frac{4}{3} \cdot (-1) + q$

$q = \frac{2}{3}$

$\boxed{m: y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}} \quad | \cdot 3$

$3y = -4x + 2$

$\boxed{m: 4x + 3y - 2 = 0}$

Příklad 19: Určete vzájemnou polohu přímek p, q a jsou-li různoběžné, určete jejich průsečík P pomocí jeho souřadnic.

a) $p: 2x - y + 3 = 0$

$q: x = 3 + 2t \quad t \in R$

$y = t \quad | \cdot (-2)$

$x = 3 + 2t$

$-2y = -2t$

$q: x - 2y - 3 = 0$

$\vec{n_p} = (2; -1)$, $\vec{n_q} = (1; -2)$

$\vec{u_p} = (1; 2)$ $\vec{u_q} = (2; 1)$

$k_1 = \frac{2}{1} = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 \neq k_2 \Rightarrow p \nparallel q$

Určíme P:

$2x - y + 3 = 0$

$x - 2y - 3 = 0 \quad | \cdot (-2)$

$2x - y + 3 = 0$

$-2x + 4y + 6 = 0$

$3y = -9$

$\boxed{y = -3}$

$x - 2 \cdot (-3) - 3 = 0$

$x + 6 - 3 = 0$

$\boxed{x = -3}$

$P[-3; 3]$

$\boxed{\text{Výsledek: } p \nparallel q, P[-3; -3]}$

---

b) $p: 3x + y - 10 = 0$

$q: x = 4 - t \quad | \cdot 3$

$y = -2 + 3t \quad t \in R$

$3x = 12 - 3t$

$y = -2 + 3t$

$q: 3x + y - 10 = 0$

$\vec{n_p} = (3; 1)$, $\vec{n_q} = (3; 1)$

$\vec{u_p} = (-1; 3)$ $\vec{u_q} = (-1; 3)$

$\vec{u_p} = \vec{u_q} \Rightarrow p \parallel q$, a protože v obou rovnicích je $c = -10$, tak jsou přímky p, q totožné, čili $p \parallel q \wedge p = q$.

c) $p: 5x-2y+6=0$ $\vec{n}_p=(5;-2)$ $\vec{n}_q=(5;-2)$

$q: \left.\begin{aligned} x &= -1+2t \quad |\cdot(-5) \\ y &= 4+5t \quad |\cdot 2 \end{aligned}\right\} t\in R$ $\vec{u}_p=(2;5)$ $\vec{u}_q=(2;5)$

$-5x=5-10t$

$2y=8+10t$

$-5x+2y=13$

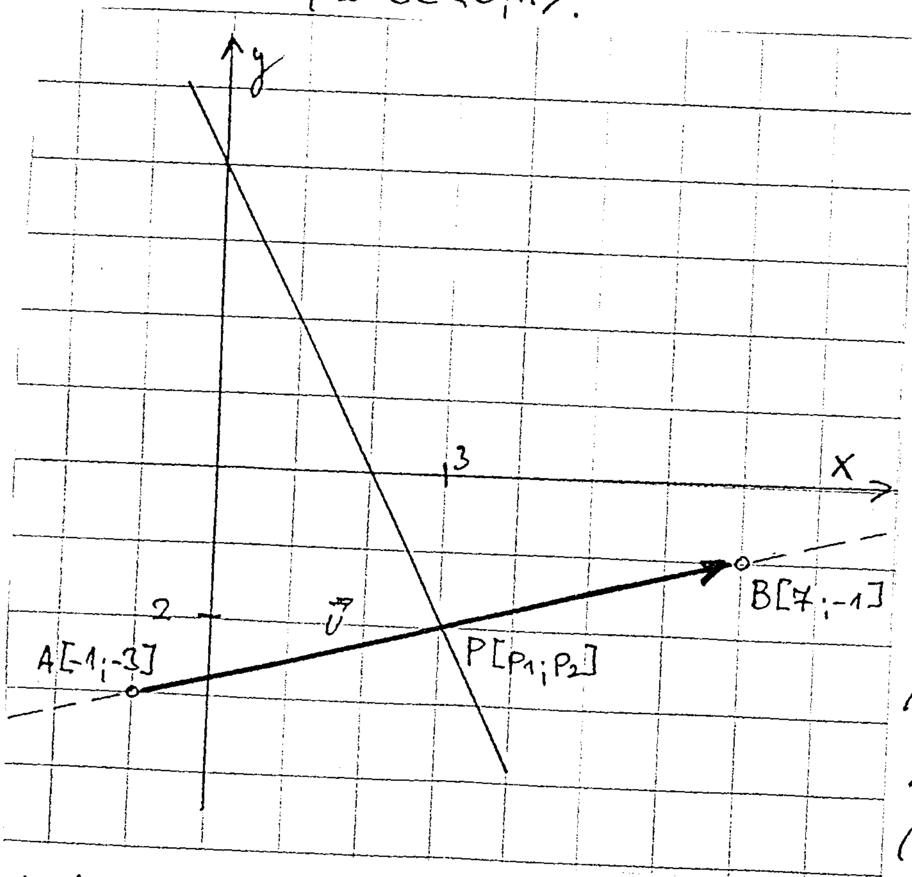
$q: \boxed{5x-2y+13=0}$

$\vec{u}_p=\vec{u}_q \Rightarrow p\parallel q$, a protože v rovnici přímky p je $c=6$ a v rovnici přímky q je $c=13$, tak přímky q jsou různé.

Přímky p, q jsou rovnoběžné a různé.

Příklad 20: Určete souřadnice průsečíku přímky $p: 2x+y-4=0$ a úsečky AB, je-li $A[-1;-3]$, $B[7;-1]$.

1) Určíme parametricky úsečku AB stejně jako přímku AB s podmínkou, že $t\in\langle 0;1\rangle$.



$\vec{u}=B-A=(8;2)$

$\left.\begin{aligned} x &= -1+8t \\ y &= -3+2t \end{aligned}\right\} t\in\langle 0;1\rangle$

2) Hodnoty $x=-1+8t$, $y=-3+2t$ dosadíme do p a vyřešíme t.

$2x+y-4=0$

$2(-1+8t)+(-3+2t)-4=0$

$-2+16t-3-2t-4=0$

$t=\frac{1}{2}$,

tzn., že podmínka pro úsečku je splněna, neboť $\frac{1}{2}\in\langle 0;1\rangle$.

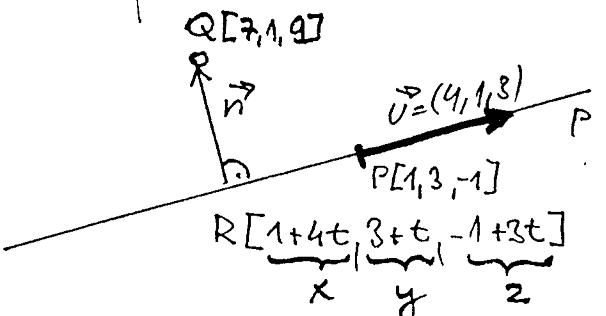
3) Určíme souřadnice bodu P:

$P_1: x=-1+8\cdot\frac{1}{2}=3$, $P_2: y=-3+2\cdot\frac{1}{2}=-2$

$\boxed{P[3;-2]}$

2) V PROSTORU

Příklad 21: Určete vzdálenost bodu $Q[7,1,9]$ od přímky $p(P;\vec{v})$, kde $P[1,3,-1]$, $\vec{v}=(4,1,3)$



$$p: \boxed{\begin{aligned} x &= 1+4t \\ y &= 3+t \\ z &= -1+3t \end{aligned}}$$

$$\vec{n} = Q-R = (7-1-4t,\ 1-3-t,\ 9+1-3t) = (6-4t,\ -2-t,\ 10-3t) = \vec{n}$$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$, neboť $\vec{n} \perp \vec{v}$

$$(6-4t,\ -2-t,\ 10-3t)\cdot(4,1,3) = 0$$

$$24-16t-2-t+30-9t = 0$$

$$52-26t = 0$$

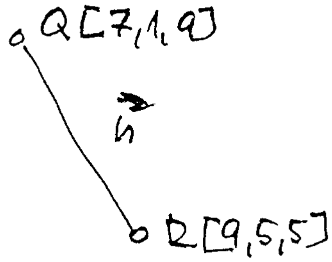
$$\boxed{t=2}$$

Protože $R\in p$, tak

$R[1+4t,\ 3+t,\ -1+3t]$

$R[1+4\cdot 2,\ 3+2,\ -1+3\cdot 2]$

$R[9,5,5]$



$$\vec{n} = Q-R = (7-9,\ 1-5,\ 9-5) = (-2,-4,4)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

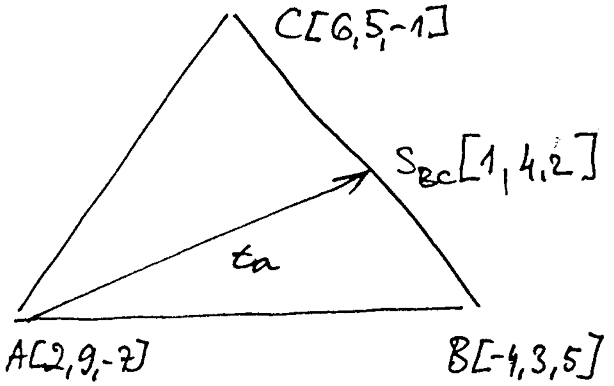
Příklad 22: Napište par. vyjádření přímky určené bodem $A[5,-2,8]$ a vektorem $\vec{v}=(4,3,-1)$.

$$\boxed{x = 5+4t,\quad y = -2+3t,\quad z = 8-t}$$

Příklad 23: Napište par. vyjádření přímky, která prochází bodem $A[9,-3,1]$ a je rovnoběžná s přímkou BC, kde $B[-4,-7,6]$, $C[2,-5,3]$.

$\vec{u} = C-B = (6,2,-3)$ $\quad\boxed{x=9+6t,\ y=-3+2t,\ z=1-3t}$

Příklad 24: Jsou dány body $A[2,9,-7]$, $B[-4,3,5]$, $C[6,5,-1]$. Najděte par. vyjádření těžnice t_a.



$\vec{t}_a = S_{BC} - A = (-1,-5,9)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 9 - 5t \\ z &= -7 + 9t \end{aligned}} \qquad t \in \langle 0; 1 \rangle$$

Příklad 24: Určete vzdálenost d bodu $P[3,-2,-1]$ od roviny

$$\rho: \underset{a}{2}x - \underset{b}{6}y + \underset{c}{3}z - \underset{d}{1} = 0$$

$P[\underset{p_1}{3}, \underset{p_2}{-2}, \underset{p_3}{-1}]$ (nebo x_0, y_0, z_0)

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2\cdot 3 - 6\cdot(-2) + 3\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{|14|}{7} = \boxed{2}$$

Příklad 25: Určete odchylku φ přímek $p(A,\vec{u})$, $q(B,\vec{v})$, je-li:
$A[1,0,3]$, $\vec{u}=(1,1,-2)$, $B[3,1,-1]$, $\vec{v}=(-1,0,1)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \qquad |\vec{u}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \quad \vec{v} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

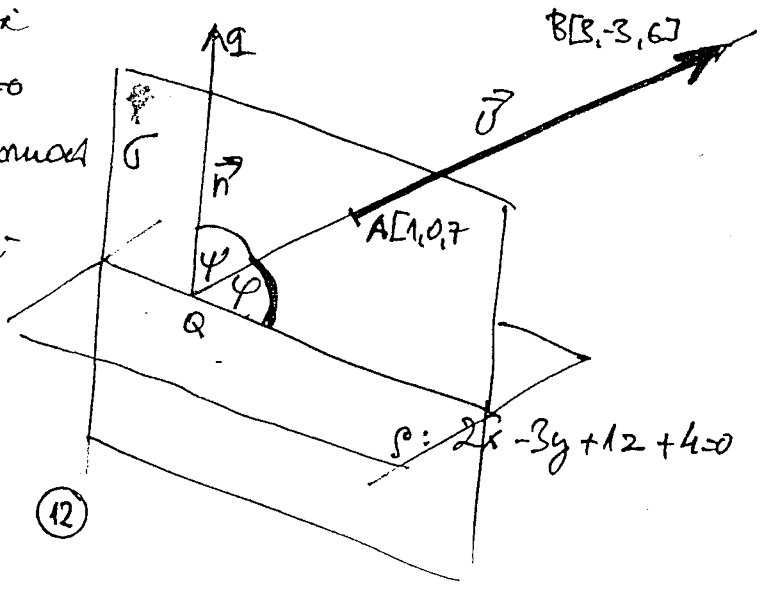
$$= \frac{|(1,1,-2)\cdot(-1,0,1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{|-1+0-2|}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \boxed{\varphi = 30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Příklad 26: Vypočítejte odchylku φ přímky AB od roviny ρ, je-li $A[1,0,7]$, $B[3,-3,6]$, $\rho: 2x-3y+z+4=0$

Velikost odchylky φ určíme pomocí úhlu ψ, který svírá kolmice q k rovině ρ, a to v bodě Q, což je průsečík přímky AB s rovinou.

DŮLEŽITÉ: Přímka AB leží v rovině σ.

ψ je úhel vektorů $\vec{n}$ a $\vec{u}$.



$\vec{u} = B - A = (2,-3,-1)$, $|\vec{u}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\vec{n} = (2,-3,1)$, $|\vec{n}| = \sqrt{14}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|(2,-3,-1)\cdot(2,-3,1)|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{|4+9-1|}{14} = \frac{6}{7} \Rightarrow$$

$\varphi \doteq 31^\circ$, $\varphi = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$ $\boxed{\varphi = 59^\circ}$

Příklad 27: Určete odchylku rovin: $\rho: -1x + 2y + 1z + 5 = 0$

$\sigma: 1x + 1y + 2z + 7 = 0$

Tuto odchylku určíme jako odchylku normálových vektorů rovin ρ a σ.

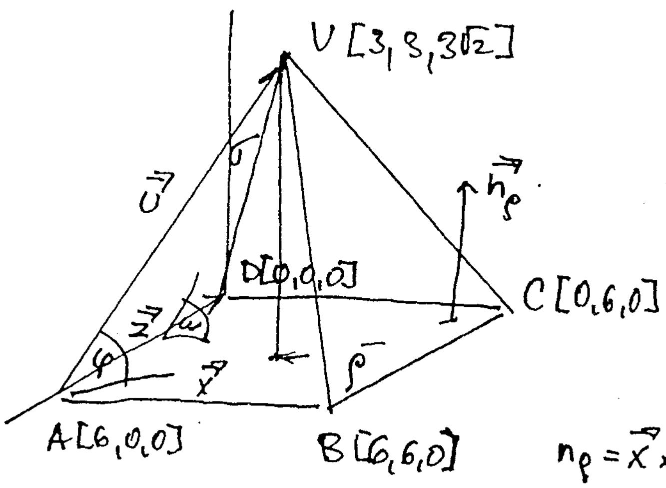
$\vec{n_\rho} = (-1,2,1)$, $\vec{n_\sigma} = (1,1,2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_\rho}\cdot\vec{n_\sigma}|}{|\vec{n_\rho}|\cdot|\vec{n_\sigma}|} = \frac{|(-1,2,1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{|-1+2+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ ... $\boxed{\varphi = 60^\circ}$

Příklad 28: Je dán pravidelný jehlan čtyřboký ABCDV, délka jeho podstavné hrany $a = 6$ cm, výška jehlanu je $v = 3\cdot\sqrt{2}$ cm. Volte vhodné umístění v soustavě souřadnic a vypočítejte odchylku a) přímky AV od roviny podstavy jehlanu,

b) roviny ADV " " " .



$\vec{u} = V - A = (-3,3,3\sqrt{2}) = (-1,1,\sqrt{2})$

$\vec{z} = D - A = (-6,0,0) = (-1,0,0)$

$\vec{x} = B - A = (0,6,0) = (0,1,0)$

$\vec{n_\rho} = \vec{u}\times\vec{z} = (0,-6\sqrt{2},6)$

1	√2	−1	1
0	0	−6	0
6	0	0	6
0	0	−6	0

$n_\rho = \vec{x}\times\vec{z}$

$n_\rho = (0,0,36)$

$n_\rho = (0,0,1)$

a) $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u}\cdot n_\rho|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}_\rho|} = \dfrac{|(-1,1,\sqrt{2})\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$

Poznámka: Úhel lze počítat s oběma „skutečnými" vektory, nebo s oběma převodními:

b) $\cos\omega = \dfrac{|\vec{n}_\rho\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho|\cdot|\vec{n}_\sigma|} =$

$n_\sigma = \vec{z}\times\vec{u} = (0,-\sqrt{2},-1) = (0,\sqrt{2},1)$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 & 1 \end{array}$$

$= \dfrac{|(0,0,1)\cdot(0,\sqrt{2},1)|}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{|0+0+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\omega = 54^\circ 44'}$

Příklad 29: Je dána rovina $\rho: x+2y+3z+4=0$ a bod $D[2,3,4]$. Sestavte

a) rovnici roviny σ, která prochází bodem D a pro niž platí $\sigma \parallel \rho$,

b) parametrické rovnice přímky p, procházející bodem D, pro kterou platí: $p \perp \rho$.

a) $\sigma: ax+by+cz+d=0$, dosadit D

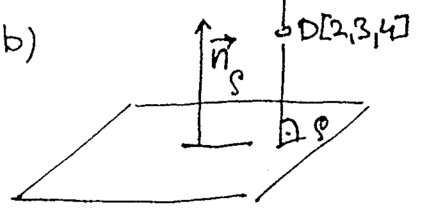
$\rho: x+2y+3z+4=0$

$2+2\cdot 3+3\cdot 4+d=0$

$\boxed{d=-20}$

$\boxed{\sigma: x+2y+3z-20=0}$

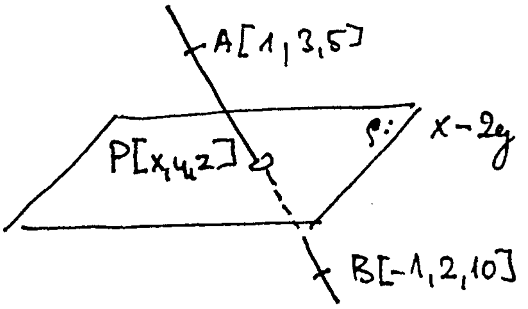
b)



$\rho: x+2y+3z+4=0$, $\vec{n}_\rho = (1,2,3)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 3+2t \\ z &= 4+3t \end{aligned}}$$

Příklad 30: Určete souřadnice průsečíku P roviny $\rho: x-2y+3z+5=0$ a přímky AB, je-li $A[1,3,5]$, $B[-1,2,10]$.



$\rho: \; x - 2y + 3z + 5 = 0 \rightarrow \vec{n_\rho} = (1,-2,3)$

$\vec{u} = B - A = (-2,-1,5)$

$\overleftrightarrow{AB}: \left.\begin{array}{l} x = 1-2t \\ y = 3-t \\ z = 5+5t \end{array}\right\}$ dosadí do ρ (VLEVO)

$1 - 2t - 2(3-t) + 3(5+5t) + 5 = 0$

$1 - 2t - 6 + 2t + 15 + 15t + 5 = 0$

$15t = -15$

$\boxed{t = -1}$ dosadí do ↑ $x = 1 - 2\cdot(-1) = 3$

$y = 3 - (-1) = 4$

$z = 5 + 5\cdot(-1) = 0$

$\boxed{P[3,4,0]}$

Příklad 31: Určete velikost odchylky rovin:

$\rho: \; x - 3y + 2z + 1 = 0$

$\sigma: \; \{[2+2t+s;\, t-s,\, 1+3t],\; t,s \in R\}$

$\sigma: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2t + 1s \\ y = 0 + 1t - 1s \\ z = 1 + 3t + 0s \end{array}\right\} t,s \in R$

$\underbrace{A[2;0;1] \quad \vec{v} = (2,1,3) \quad \vec{u} = (1,-1,0)}$

Z těchto údajů vytvoříme normálový vektor roviny σ.

$\vec{n_\sigma} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3,-3,3) = \underline{(-1,-1,1)}$

$\begin{array}{cccccccc} -1 & & 0 & & 1 & & -1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & 3 & & 2 & & 1 \end{array}$

$\underline{n_\rho = (1,-3,2)}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_\rho}\cdot\vec{n_\sigma}|}{|\vec{n_\rho}|\cdot|\vec{n_\sigma}|} = \frac{|(1,-3,2)\cdot(-1,-1,1)|}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-1+3+2|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{42}}$$

$\boxed{\Rightarrow \varphi \doteq 51^\circ 53'}$

Příklad 32: Vypočítejte odchylku rovin $\rho: x - y + 2z + 3 = 0$, $\sigma: 2x - z + 12 = 0$.

$\vec{n_\rho} = (1,-1,2)$, $\vec{n_\sigma} = (2,0,-1)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_\rho}\cdot\vec{n_\sigma}|}{|\vec{n_\rho}|\cdot|\vec{n_\sigma}|} = \frac{|(1,-1,2)\cdot(2,0,-1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}} = \frac{|2-2|}{\sqrt{30}} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 90^\circ}$$

Příklad 33: Je dán čtyřstěn $ABCD$, $A[0,1,3]$, $B[1,0,2]$, $C[-2,-1,5]$, $D[0,-2,-6]$. Vypočítejte:

a) odchylku přímky AD a roviny ABC,

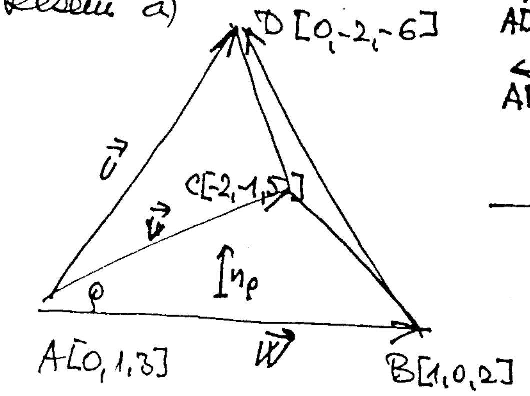
b) odchylku rovin ABC a ABD,

c) obsah stěny ABC,

d) objem čtyřstěnu $ABCD$.

Protože do výpočtů vstupují též délky vektorů, tak vektory „nezkracovat“.

Řešení a)



$\overleftrightarrow{AD}: \vec{u} = D - A = (0,-3,-9)$

$\overleftrightarrow{ABC}: \vec{v} = C - A = (-2,-2,2)$

$\vec{w} = B - A = (1,-1,-1)$

$\vec{n}_\rho = \vec{v} \times \vec{w} = (4,0,4)$

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & & 2 & & -2 & & -2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -1 & & -1 & & 1 & & -1 \end{array}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|(4,0,4)\cdot(0,-3,-9)|}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{90}} = \frac{|0+0-36|}{\sqrt{2880}} = \frac{36}{\sqrt{2880}} \Rightarrow$$

$= \varphi = 47°52'$, $\varphi = 90° - (47°52') = 42°8'$ $\boxed{\varphi = 42°8'}$

b) $\rho = \overleftrightarrow{ABC}$, $\vec{n}_\rho = (4,0,4)$

$\sigma = \overleftrightarrow{ABD}$; $\vec{n}_\sigma = \vec{w} \times \vec{u} = (6,9,-3)$

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & -1 & & 1 & & -1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -3 & & -9 & & 0 & & -3 \end{array}$$

$$\cos\omega = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{n}_\sigma|} = \frac{|(4,0,4)\cdot(6,9,-3)|}{\sqrt{16+16}\cdot\sqrt{36+81+9}} = \frac{|24-12|}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{126}} = \frac{12}{\sqrt{4032}} \Rightarrow \boxed{\omega \doteq 79°6''}$$

c) $S = \frac{1}{2}|\vec{v}\times\vec{w}| = \frac{1}{2}|4,0,4| = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ … $\boxed{S = 2\sqrt{2}}$

d) $V = \frac{1}{6}|(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}| = \frac{1}{6}|(4,0,4)\cdot(0,-3,-9)| = \frac{1}{6}|0+0-36| = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6$

$\boxed{V = 6}$

Príklad 34: Vypočítajte vzdialenosť bodu $P[\overset{x_0}{3},\overset{y_0}{-2},\overset{z_0}{-1}]$ od roviny $\rho: \overset{a}{2}x - \overset{b}{6}y + \overset{c}{3}z - 1 = 0$

$$d = |P;\rho| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2.3 - 6.(-2) + 3.(-1) - 1|}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}} = \frac{|6+12-3-1|}{\sqrt{49}} =$$

$$= \frac{|14|}{7} = 2 \qquad \boxed{d = 2}$$

Príklad 35: Vypočítajte vzdialenosť bodu $A[2,-3,1]$ od roviny ρ:

$x = 1 - t + 3s$ (1)
$y = 7 + 2t - s$ (2)
$z = -3 - t + 3$ (3) 1.2

Rovnici roviny musíme vyjadriť v obecnom tvare. Z jednej dvojice rovníc vypočítame hodnoty s, t a tie dosadíme do zvyšnej rovnice.

Z (2) a (3) vypočítame

a) t vylúčením s

$y + z = 4 + t$

$\boxed{t = y + z - 4}$

b) s vylúčením t

$y = 7 + 2t - s$
$2z = -6 - 2t + 2s$

$y + 2z = 1 + s$

$\boxed{s = y + 2z - 1}$

Dosadíme do (1)

$x = 1 - (y + z - 4) + 3(y + 2z - 1)$

$x = 1 - y - z + 4 + 3y + 6z - 3$

$\boxed{x - 2y - 5z = 0}$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -5$

$A[\overset{}{\underset{x_0}{2}},\underset{y_0}{-3},\underset{z_0}{1}]$

$$d = |A;\rho| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1.2 - 2.(-3) - 5.1|}{\sqrt{1+4+25}} =$$

$$= \frac{|2+6-5|}{\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{3.\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{10} \quad \boxed{d = \frac{\sqrt{30}}{10}}$$

Príklad 36: Rozhodnite o vzájomnej polohe

a) roviny ρ: $x = 1 - 2r + 5s$ a priamky p: $x = 4 - 3t$
$y = 2 + 3r$; $y = 5 - 3t$
$z = 4s$; $z = 4 + 4t$

$r, s \in R$; $t \in R$

$\vec{u}_\varrho = (-2,3,0)$

$\vec{v}_\varrho = (5,0,4)$

$\vec{n}_\varrho = \vec{u}_\varrho \cdot \vec{v}_\varrho = (12,8,15)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$\vec{w}_p = (-3,-3,4)$ ... směr. vektor $P[4,5,4]$

Věta: $\vec{n}_\varrho \cdot \vec{w}_p = 0 \iff p \parallel \varrho$

$\vec{n}_\varrho \cdot \vec{w}_p \neq 0 \iff p \nparallel \varrho$

$\vec{n}_\varrho \cdot \vec{w}_p = (12,8,15)\cdot(-3,-3,4) =$

$= -36-24+60 = 0 \Rightarrow \boxed{p \parallel \varrho}$

Zjistili jsme, že $p \parallel \varrho$. Nyní ještě zjistíme, zda $p \subset \varrho$.

$P[4,5,4]$ dosadíme do rovnice roviny.

① $4 = 1-2r+5s$

② $5 = 2+3r \quad \Rightarrow r=1$

③ $4 = 4s \quad \Rightarrow s=1$

dosadíme

$L(1)=4$

$P(1)=1-2\cdot 1+5\cdot 1=4$

$L(1)=P(1) \Rightarrow \boxed{p \subset \varrho}$

Přímka p leží v rovině ϱ.

---

b) rovina ϱ: $x-5y+4z-6=0$ a p: $x=2-t$, $y=3t$, $z=3+4t$, $t\in\mathbb{R}$

$\vec{n}_\varrho = (1,-5,4)$

$P[2,0,3]$, $\vec{u}_p = (-1,3,4)$

$\vec{n}_\varrho \cdot \vec{u}_p = (1,-5,4)\cdot(-1,3,4) =$

$= -1-15+16=0 \Rightarrow \boxed{p\parallel\varrho}$

Nyní se ptáme, zda $P\in\varrho$: $L = x-5y+4z-6 = 2-5.0+4.3 = 14$

$P=0$

$L \neq P \Rightarrow p \not\subset \varrho$.

Přímka p je rovnoběžná s rovinou, ale neleží v ní.

---

c) rovina ϱ: $x=2+r-s$, $y=1+3r$, $z=3+2r+4s$ a přímky AB, kde

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

$p = \overleftrightarrow{AB}$, $A[2,-3,-2]$, $B[3,-1,1]$

$\vec{u}=(1,3,2)$, $\vec{v}=(-1,0,4)$

$\vec{n}_\varrho = \vec{u}\times\vec{v} = (12,-6,3) = (4,-2,1)$

$\vec{w}_p = B-A = (1,2,3)$

$\vec{n}_\varrho \cdot \vec{w}_p = (4,-2,1)\cdot(1,2,3) = 3 \Rightarrow \boxed{AB \nparallel \varrho}$, neboť $3 \neq 0$.

d) rovin ρ a σ, je-li

$\rho: 2x-5y+4z-10=0$ $\qquad$ $\sigma: 4x-10y+8z-10=0$

$\vec{n}_\rho=(2,-5,4)$ $\qquad$ $\vec{n}_\sigma=(4,-10,8)$

$\vec{n}_\sigma = 2\cdot\vec{n}_\rho \Rightarrow \rho \parallel \sigma$

Protože -10 není dvojnásobek (-10), tak roviny jsou různé.

Roviny ρ a σ jsou rovnoběžné různé.

---

e) $\rho: 2x-5y+4z-10=0$ $\qquad$ $\sigma: x-y-z-2=0$

$\vec{n}_\rho=(2,-5,4)$, $\vec{n}_\sigma=(1,-1,-1)$ $\quad \vec{n}_\sigma \neq k\,\vec{n}_\rho \Rightarrow \rho \nparallel \sigma$

Hledáme jejich průsečnici.

Položme $\boxed{z=t}$.

$$\left.\begin{aligned} 2x-5y+4t-10&=0\\ x-y-t-2&=0 \end{aligned}\right\}$$

Vylučme postupně x, y. $\quad 1\cdot(-2) \quad 1\cdot(-5)$

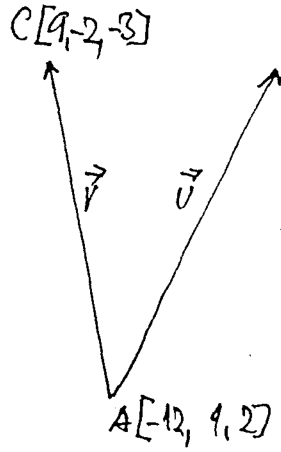
$$\begin{aligned} 2x-5y+4t-10&=0\\ -2x+2y+2t+4&=0\\ \hline -3y+6t-6&=0\\ 3y&=-6+6t \quad |:3\\ y&=-2+2t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x-5y+4t-10&=0\\ -5x+5y+5t+10&=0\\ \hline -3x+9t&=0\\ 3x&=9t\\ x&=3t \end{aligned}$$

$\boxed{y=-2+2t}$ $\qquad$ $\boxed{x=3t}$

Průsečnice: $x=3t$
$y=-2+2t$
$z=t$

Roviny ρ a σ jsou různoběžné, jejich průsečnice je: $x=3t$, $y=-2+2t$, $z=t$.

Příklad 37: Napište obecnou rovnici roviny ABC, je-li: $A[-12,1,2]$, $B[-4,-3,2]$, $C[9,-2,-3]$



$B[-4,-3,2]$ $\quad \vec{u}=B-A=(8,-4,0)$, $\vec{v}=C-A=(21,-3,-5)$, $\rho=\overleftrightarrow{ABC}$

$$\begin{matrix} -4 & & 0 & & 8 & & -4\\ & \times & & \times & & \times & \\ -3 & & -5 & & 21 & & -3 \end{matrix}$$

$\vec{n}_\rho=(20,-40,60)=(1,2,3)$
$\qquad\qquad a \quad b \quad c$

$\rho: ax+by+cz+d=0$

$x+2y+3z+d=0$ $\quad$ DOSAĎ A

$\boxed{d=4}$

$\boxed{x+2y+3z+4=0}$