# 4.4 Rovnoběžnost a kolmost dvou přímek

① Zjistěte, které dvojice přímek jsou rovnoběžné:

$p: x = 3-4t$
$y = 4+3t$

$q: x = 3-3t$
$y = 4+3t$

$r: x = 1+8t$
$y = 5-6t$

$P[3;4]$, $\vec{s_1}=(-4;3)$ $Q[3;4]$, $\vec{s_2}=(-3;3)$ $R[1;5]$, $\vec{s_3}=(8;-6)$

Položme si otázky, zda a) $p \parallel q$, b) $p \parallel r$, c) $q \parallel r$.

a) Je $p \parallel q$? Jestliže ano, pak směrový vektor $\vec{s_2}$ je k-násobkem směrového vektoru $\vec{s_1}$. To zapíšeme: ↓ totéž platí pro norm. vektory $\vec{n_1}, \vec{n_2}$

$\vec{s_2} = k \cdot \vec{s_1}$ ; $k \in R \wedge k \neq 0$

$(-3;3) = k(-4;3)$

$(-3;3) = (-4k;3k)$ → Jestliže tato rovnost platí, pak

$-4k = -3 \wedge 3k = 3$

$k = \frac{3}{4} \wedge k = 1$, což neplatí,

z toho plyne, že $\boxed{p \nparallel q.}$

b) Je $p \parallel r$?

$\vec{s_3} = k \cdot \vec{s_1}$

$(8;-6) = k(-4;3)$ → $(8;-6) = (-4k;3k)$

$-4k = 8 \wedge 3k = -6$

$\underbrace{k=-2 \wedge k=-2}_{\text{platí}} \Rightarrow \boxed{p \parallel r}$

c) Je $q \parallel r$?

$\vec{s_3} = k \cdot \vec{s_2}$

$(8;-6) = k(-3;3)$ → $(8;-6) = (-3k;3k)$

$-3k = 8 \wedge 3k = -6$

$k = -\frac{8}{3} \wedge k = -2$, neplatí $\Rightarrow \boxed{q \nparallel r}$

② Zjistěte, které dvojice přímek jsou navzájem kolmé.

$p: x = 2+5t$
$y = -1+3t$

$q: x = 2-3t$
$y = 4+5t$

$r: x = 7+3t$
$y = -5+5t$

$\vec{s_1} = (\underset{a_1}{5};\underset{b_1}{3})$ $\vec{s_2} = (\underset{a_2}{-3};\underset{b_2}{5})$ $\vec{S_3} = (\underset{a_3}{3};\underset{b_3}{5})$

Při řešení využijeme větu, která je kritériem kolmosti dvou vektorů.

Pro dva vektory $\vec{s_1}=(a_1;a_2)$, $\vec{s_2}=(b_1,b_2)$ platí: jestliže $\vec{s_1}.\vec{s_2}=0$ $(a_1b_1+a_2b_2=0)$, pak $\vec{s_1}\perp\vec{s_2}$. .. Totéž platí pro 2 normálové vektory.

a) Je $p\perp q$? Jinak řečeno je $\vec{s_1}\perp\vec{s_2}$?

$$a_1b_1+a_2b_2=5\cdot(-3)+3\cdot5=-15+15=0 \Rightarrow \vec{s_1}\perp\vec{s_2} \wedge \boxed{p\perp q}$$

Správnost výsledku si můžeme ověřit pomocí vzorce

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}.\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}|.|\vec{s_2}|}=\frac{|(5;3).(-3;5)|}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}}=$$

$$|\vec{s_1}|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$$

$$|\vec{s_2}|=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$$

$$=\frac{-15+15}{\sqrt{1156}}=\frac{0}{\sqrt{1156}}=0\quad,\ \cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=90$$

---

b) Je $p\perp r$?

$a_1a_3+b_1b_3=5\cdot3+3\cdot5=30$; $30\neq0 \Rightarrow$ přímka $p$ není kolmá k přímce $r$.

c) Je $q\perp r$?

$\vec{s_2}.\vec{s_3}=(-3)3+5\cdot5=-9+25=16$; $16\neq0$ .. neplatí, že $q\perp r$.

---

③ Zjistěte, zda jsou následující přímky rovnoběžné, nebo k sobě kolmé.

a) $p: 3x-7y+5=0$ $\quad q: 6x-14y+2=0$ $\quad r: 7x+3y-1=0$

Při řešení se stačí zaměřit pouze na normálové vektory. Přímky budou rovnoběžné, jestliže jeden normálový vektor je násobkem druhého normálového vektoru.

Přímky budou kolmé, jestliže součin normálových vektorů obou přímek se bude rovnat nule.

Platí:

$\vec{n_p}=(3;-7)$ $\quad \vec{n_q}=(6;-14)$ $\quad \vec{n_r}=(7;3)$

Pro přímky

Pro $\boxed{p, q}$ platí:

$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = (3; -7) \cdot (6; -14) = 18 + 98 = 116$; $116 \neq 0$ ... $p, q$ nejsou kolmé

$\vec{n}_q = k \cdot \vec{n}_p$ ? ... $(6; -14) = k(3; -7)$

$(6; -14) = (3k; -7k)$ → $3k = 6 \wedge -7k = -14$

$\underbrace{k = 2 \wedge k = 2}$

$\Downarrow$

$\boxed{p \parallel q}$

Pro $\boxed{p, r}$ platí: $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_r = (3; -7) \cdot (7; 3) = 21 - 21 = 0 \Rightarrow \boxed{p \perp r}$...

když je $p \perp r \Rightarrow p \nparallel r$

Pro $\boxed{q, r}$ platí: $\vec{n}_q \cdot \vec{n}_r = (6; -14) \cdot (7; 3) = 42 - 42 = 0 \Rightarrow \boxed{q \perp r}$

b) $p: 2x + 4y - 1 = 0$ $\quad$ $q: x - 2y + 3 = 0$ $\quad$ $r: 2x + y - 7 = 0$

$\vec{n}_p = (2; 4)$ $\quad$ $\vec{n}_q : (1; -2)$ $\quad$ $\vec{n}_r = (2; 1)$

Pro $\boxed{p, q}$ platí: $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = (2; 4) \cdot (1; -2) = 2 - 8 = -6$; $-6 \neq 0$ $p, q$ nejsou kolmé.

$\vec{n}_q = k \vec{n}_p$ ... $(1; -2) = k(2; 4)$ → $2k = 1 \wedge 4k = -2$

$(1; -2) = (2k; 4k)$ $\quad$ $k = \frac{1}{2} \wedge k = -\frac{1}{2}$ je nepravda $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Přímky $p, q$ nejsou ani rovnoběžné!

Pro $\boxed{p, r}$ platí: $\vec{n}_p \cdot \vec{n}_r = (2; 4) \cdot (2; 1) = 4 + 4 = 8$; $8 \neq 0$ ... $p, r$ nejsou kolmé

$\vec{n}_r = k \vec{n}_p$ → $2k = 2 \wedge 4k = 1$

$(2; 1) = k(2; 4)$ $\quad$ $k = 1 \wedge 4 = 1$ je nepravda $\Rightarrow$ Přímky $p, r$ nejsou ani rovnoběžné!

$(2; 1 = (2k; 4k)$

Pro $\boxed{q, r}$ platí: $\vec{n}_q \cdot \vec{n}_r = (1; -2) \cdot (2; 1) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{q \perp r}$

4 Zjistěte, zda jsou následující přímky rovnoběžné, nebo k sobě kolmé.

a) $p: y = 3x - 1$ $\quad$ $q: y = -\frac{1}{3}x + 4$ $\quad$ $r: y = 6x + 2$

Tyto přímky jsou zapsány pomocí rovnic ve směrnicovém tvaru. Přímky, které jsou rovnoběžné, mají stejné směrnice.

Přímka kolmá k přímce se směrnicí $k$ má směrnici $-\frac{1}{k}$.

$\boxed{p, q}$ ... $k_p = 3$, $k_q = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{p \perp q}$

$\boxed{p, r}$ a $\boxed{q, r}$ jsou různoběžné přímky, které nesvírají pravý úhel.

---

b) $p: y = -\frac{1}{2}x + 2$ $\qquad$ $q: y = -\frac{1}{2}x$ $\qquad$ $r: y = 2x - 7$

$k_p = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $k_q = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $k_r = 2$

$\boxed{p, q}$ ... $k_p = k_q = -\frac{1}{2} \Rightarrow p \parallel q$

$\boxed{p, r}$ ... $k_p = -\frac{1}{k_r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{p \perp r}$ $\qquad$ $\boxed{q, r}$ ... $k_q = -\frac{1}{k_r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{q \perp r}$

---

5) Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A[3;-1]$ a je rovnoběžná s přímkou

a) $x = 2 + 3t$, $y = -1 - t$ $\qquad$ b) $x = 3 + 7t$, $y = 2 - 2t$ $\qquad$ c) $x = 7 - 3t$, $y = 1 + 5t$.

Označíme-li požadovanou přímku písmenem $p$, pak bude mít tato přímka stejný směrový vektor jako přímka určená v a), b), c).

a) $\vec{s} = (3t, -t)$ $\qquad$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 3 + 3t \\ y &= -1 - t \end{aligned}}$

b) $\vec{s} = (7t, -2t)$ $\qquad$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 3 + 7t \\ y &= -1 - 2t \end{aligned}}$

c) $\vec{s} = (-3t; 5t)$ $\qquad$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 3 - 3t \\ y &= -1 + 5t \end{aligned}}$

---

6) Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A[-3;5]$ a je kolmá k přímce:

a) $x = 5 + 7t$, $y = -1 - 2t$ $\qquad$ b) $x = 3 + 2t$, $y = 4 - 3t$

Směrové vektory požadované kolmice jsou stejné jako normálové vektory daných přímek.

a) $\vec{s} = (7t; -2t)$

$\vec{n} = (2t; 7t)$ $\qquad$ $\boxed{\begin{aligned} x &= -3 + 2t \\ y &= 5 + 7t \end{aligned}}$

b) $\vec{s} = (2t; -3t)$ $\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= -3 + 3t \\ y &= 5 + 2t \end{aligned}}$

$\vec{n} = (3t; 2t)$

---

(7) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A[-5;3] a je rovnoběžná s přímkou

a) $2x + 5y - 4 = 0$ $\qquad$ b) $3x - 4y + 1 = 0$.

Řešení a) Z rovnice $2x + 5y - 4$ vyčteme normálový vektor: $\vec{n} = (2; 5)$. Ten přeměníme na směrový vektor požadované přímky procházející bodem A[-5;3]. Sestavíme příslušné parametrické rovnice této přímky a ty snadnou eliminací upravíme na obecnou rovnici přímky:

$\vec{n} = (2;5)\cdot t$

$\vec{s} = (-5;2)\cdot t$

$x = -5 - 5t \quad |\cdot 2$

$y = 3 + 2t \quad |\cdot 5$

$2x = -10 - 10t$

$5y = 15 + 10t$

$2x + 5y = 5$

$\boxed{2x + 5y - 5 = 0}$

Řešení b) $\vec{n} = (3;-4)\cdot t \;|\; \vec{n} = (3t; -4t)$

$\vec{s} = (4;3)\cdot t \;|\; \vec{s} = (-4t; -3t)$

$x = -5 - 4t \quad |\cdot 3$

$y = 3 - 3t \quad |\cdot(-4)$

$3x = -15 - 12t$

$-4y = -12 + 12t$

$3x - 4y = -27$

$\boxed{3x - 4y + 27 = 0}$

---

(8) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A[-1;0] a je kolmá k přímce:

a) $4x - 3y + 2 = 0$ $\qquad$ b) $5x + 2y - 1 = 0$

a)

$\vec{n} = (4t; -3t)$

$x = -1 + 4t \quad |\cdot 3$

$y = 0 - 3t \quad |\cdot 4$

$3x = -3 + 12t$

$4y = -12t$

$3x + 4y = -3$

$\boxed{3x + 4y + 3 = 0}$

b)

$\vec{n} = (5t; 2t)$

$x = -1 + 5t \quad |\cdot(-2)$

$y = 0 + 2t \quad |\cdot 5$

$-2x = 2 - 10t$

$5y = 10t$

$-2x + 5y = 2$

$-2x + 5y - 2 = 0 \quad |\cdot(-1)$ . $\boxed{2x - 5y + 2 = 0}$

9) Napíšte smernicovou rovnicu priamky, ktorá je a) rovnobežná s priamkou $y=2x+5$, b) kolmá na priamku $y=\frac{2}{3}x-1$ a prechádza bodom $A[-4;-7]$.

a) $k=2$, $A[-4;-7]$

$y=kx+q$

$-7=2\cdot(-4)+q$

$-7=-8+q$

$q=1$

$\boxed{y=2x+1}$

b) $k=-\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=-\dfrac{3}{2}$

$y=kx+q$

$-7=-\frac{3}{2}\cdot(-4)+q$

$-7=6+q$

$q=-13$

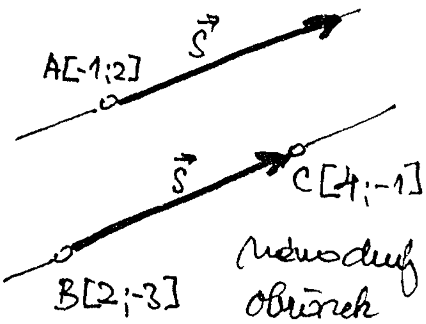
$\boxed{y=-\frac{3}{2}x-13}$

---

10) Napíšte rovnicu priamky $p$, ktorá prechádza bodom $A[-1;2]$ a je rovnobežná s priamkou určenou body $B[2;-3]$, $C[4;-1]$. Priamku $p$ vyjadrite a) v parametrických rovniciach,

b) v obecnom tvare,

c) v smernicovom tvare.




$\vec{s}=C-A=(4-2;-1+3)=(2;2)\ldots\ \vec{s}=(2t;2t)$

$p: \boxed{\begin{aligned} x&=-1+2t \\ y&=2+2t \end{aligned}}\quad |\cdot(-1)$

$-x=1-2t$

$y=2+2t$

$-x+y=3$

$-x+y-3=0\quad |\cdot(-1)$

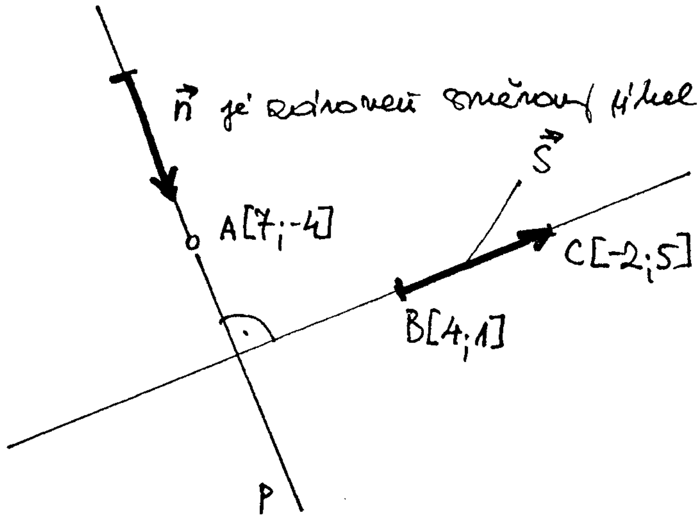
$\boxed{x-y+3=0} \rightarrow \boxed{y=x+3}$

---

11) Napíšte rovnicu priamky $p$, ktorá prechádza bodom $A[7;-4]$ a je kolmá k priamke určenej body $B[4;1]$, $C[-2;5]$. Priamku $p$ vyjadrite: a) v parametrických rovniciach,

b) v obecnom tvare,

c) v smernicovom tvare.




$\vec{n}$ je zároveň směrový vektor přímky p

$\vec{s} = C - B = (-2-4; 5-1)$

$\vec{s} = (-6; 4) \quad \Rightarrow \vec{n} = (4; 6) \ldots$

~~$\vec{s} = ($~~

a)

$$\boxed{\begin{aligned} p:\ x &= 7 + 4t \\ y &= -4 + 6t \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &1\cdot 6 \\ &1\cdot(-4) \end{aligned}$$

$$6x = 42 + 24t$$
$$-4y = 16 - 24t$$

$$6x - 4y = 58$$

$$6x - 4y - 58 = 0 \qquad 1:2$$

b) $\boxed{p:\ 3x - 2y - 29 = 0}$

$$2y = 3x - 29 \quad 1:2$$

c) $\boxed{p:\ y = \frac{3}{2}x - \frac{29}{2}}$

---

(12) Určete číslo $\underline{a}$ tak, aby přímka $ax + 3y - 2 = 0$ byla kolmá k přímce $4x + 6y - 5 = 0$.

Označme: $p: ax + 3y - 2 = 0$ , $q: 4x + 6y - 5 = 0$ $\rightarrow k = -\frac{2}{3}$

1) Určeme směrnici přímky q: $6y = -4x + 5$

$$y = -\frac{4}{6}x + \frac{5}{6}$$

$$y = \boxed{-\frac{2}{3}}x + \frac{5}{6}$$

2) Určeme směrnici přímky p:

$-\frac{1}{k} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ , dosadíme do rovnice přímky p:

$$ax + 3y - 2 = 0$$
$$3y = -ax + 2$$
$$y = \boxed{-\frac{a}{3}}x + \frac{2}{3}$$

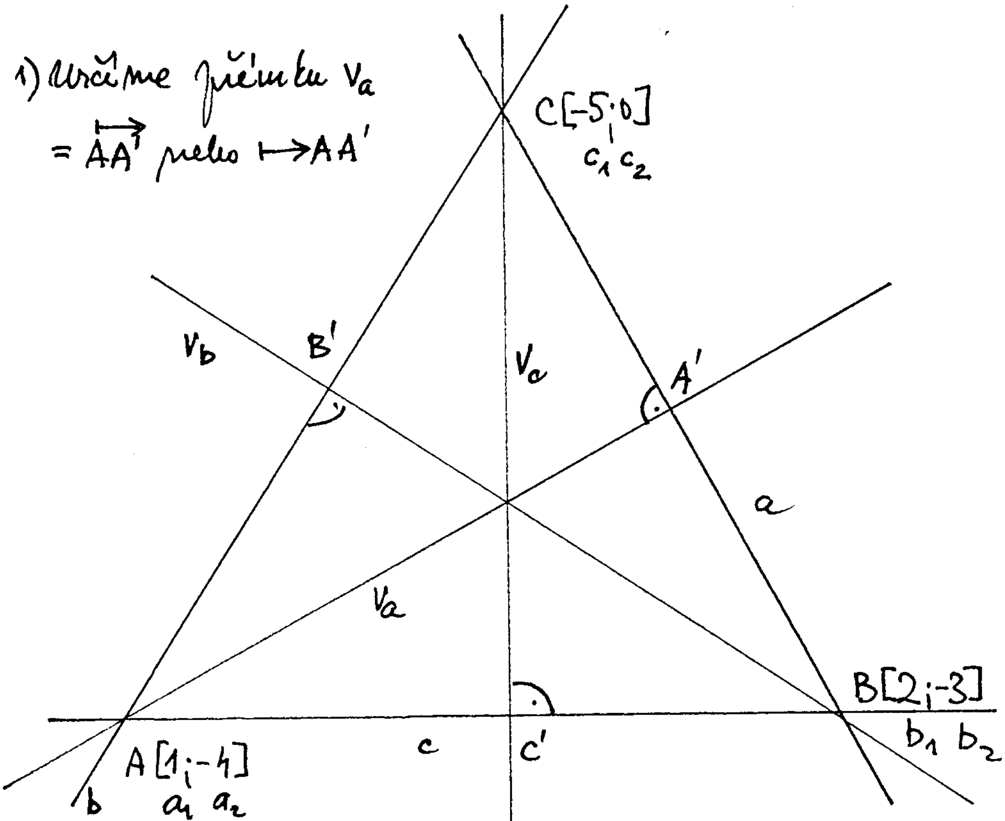
$$-\frac{1}{k} = -\frac{a}{3}$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{a}{3} \rightarrow \boxed{a = -\frac{9}{2} = -4{,}5}$$

---

(13) V trojúhelníku ABC s vrcholy A[1;−4], B[2;−3], C[−5;0] určete rovnice těžnic a výšek (nepřesná formulace, už jsem se o ní zmínil).

1) Určíme přímku $v_a = \overrightarrow{AA'}$ přes $\mapsto AA'$




Platí, že $v_a \perp a$

a: $y=\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}(x-b_1)+b_2$

$y=\frac{3}{-7}(x-2)-3$

$y=-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}-3$

$y=\boxed{-\frac{3}{7}}x-\frac{15}{7}$

$k=-\frac{3}{7}$ je směrnice přímky $a = \overrightarrow{BC}$

→ $-\frac{1}{k}$ je směrnice $v_a$

$-\frac{1}{k}=-\frac{1}{-\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$, a to je směrnice $v_a$,

tu pak rovnici $y=kx+q$; vypočítáme $q$; víme, že $k=\frac{7}{3}$, $x=1$, $y=-4$ (souřadnice bodu A

$y=kx+q$

$-4=\frac{7}{3}\cdot 1+q$ → $q=-\frac{19}{3}$

$v_a$: $y=kx+q$

$y=\frac{7}{3}x-\frac{19}{3}$ $|\cdot 3$

$3y=7x-19$

Rovnice přímky $\boxed{v_a}$: $\boxed{7x-3y-19=0}$

2) Určíme rovnici přímky $v_b=\overrightarrow{BB'}$, $v_b \perp b$

b: $y=\frac{c_2-a_2}{c_1-a_1}(x-a_1)+a_2$

$y=\frac{4}{-6}(x-1)-4$

$y=-\frac{2}{3}(x-1)-4$

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}-4$

$y=-\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$

$k=\boxed{-\frac{2}{3}}$ je směrnice přímky $b=\overrightarrow{AC}$

$-\frac{1}{k} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$ je směrnice $v_b$

$y = \frac{3}{2}x + q$, dosadí $B[2;-3]$

$-3 = \frac{3}{2}\cdot 2 + q$

$q = -6$

$y = \frac{3}{2}x - 6 \quad |\cdot 2$

$2y = 3x - 12$

Rovnice přímky $\boxed{v_b}$ : $\boxed{3x-2y-12=0}$

3) Určíme rovnici přímky $v_c = \overrightarrow{AB}$

$c = \overrightarrow{AB}$, $v_c \perp c$

$c: y = \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)+a_2$

$y = \frac{1}{1}(x-1)-4$

$y = \boxed{1}x - 5$

$k=1$ ; $-\frac{1}{k} = -1$

$y = -1x + q$, dosadí $C[-5;0]$

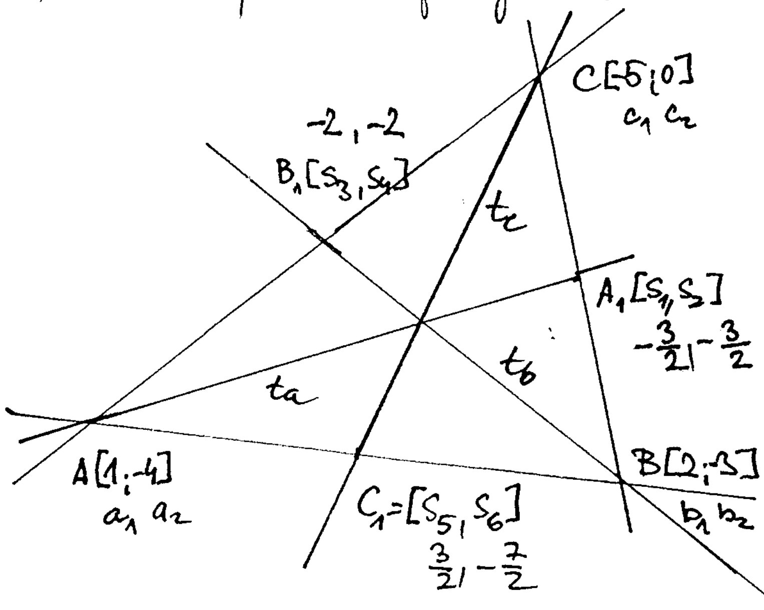
$0 = -1\cdot(-5)+q$

$q = -5$

$y = -x-5$

$\boxed{v_c}$ $\boxed{x+y+5=0}$

4) Určíme rovnici přímky $t_a = \overrightarrow{AA_1}$ : $s_1 = \frac{-5+2}{2} = -\frac{3}{2}$, $s_2 = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2}$




$t_a: y = \frac{s_2-a_2}{s_1-a_1}\cdot(x-a_1)+a_2$

$y = \frac{-\frac{3}{2}+4}{-\frac{3}{2}-1}(x-1)-4$

$y = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}(x-1)-4$

$y = -(x-1)-4$

$y = -x+1-4$

$y = -x-3$

$\boxed{t_a}$ : $\boxed{x+y+3=0}$

5) Určíme rovnici přímky $t_b = \overrightarrow{BB_1}$ :

$s_3 = \frac{-5+1}{2} = -2$ , $s_4 = \frac{0-4}{2} = -2$

$t_b: y = \frac{s_4 - b_2}{s_3 - b_1}(x - b_1) + b_2$

$y = \frac{-2+3}{-2-2}(x-2) - 3$

$y = -\frac{1}{4}(x-2) - 3$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - 3$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{2} \quad | \cdot 4$

$4y = -x - 10$

$\boxed{t_b} : \boxed{x + 4y + 10 = 0}$

---

6) určíme $t_c = \overleftrightarrow{CC_1}$

$s_5 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad s_6 = \frac{-3-4}{2} = -\frac{7}{2}$

$t_c: y = \frac{s_6 - c_2}{s_5 - c_1}(x - c_1) + c_2$

$y = \frac{-\frac{7}{2} - 0}{\frac{3}{2} + 5}(x+5) + 0$

$y = -\frac{7}{13}(x+5)$

$y = -\frac{7}{13}x - \frac{35}{13} \quad | \cdot 13$

$13y = -7x - 35$

$\boxed{t_c} : \boxed{7x + 13y + 35 = 0}$

---

KONEC ČLÁNKU 4.4