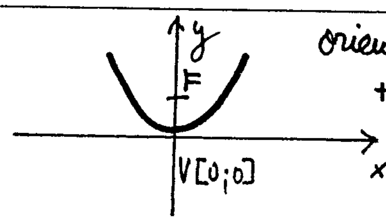
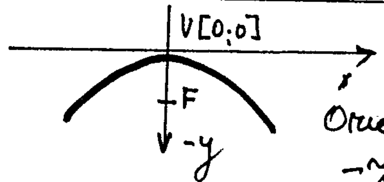
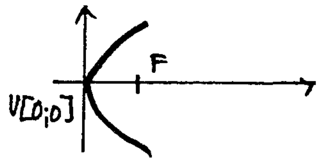
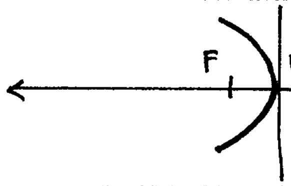
4.9 Parabola

① Napište osovou rovnici paraboly, která má ohnisko:

a) F[2;0]

Základní poučení

PARABOLA

	Osová rovnice paraboly s vrcholem V[0;0]	Rovnice tečen paraboly s vrcholem V[0;0]	Orientace grafu paraboly s vrcholem V[0;0]
1.	$x^2 = 2py$	$t: xx_0 = p(y+y_0)$	 orientace +y
2.	$x^2 = -2py$	$t: xx_0 = -p(y+y_0)$	 Orientace −y
3.	$y^2 = 2px$	$t: yy_0 = p(x+x_0)$	 Orientace +x
4.	$y^2 = -2px$	$t: yy_0 = -p(x+x_0)$	Orient: −x 

Řešení a): Podle polohy ohniska jde o orientaci +x = vzorec 1.

F[2;0]

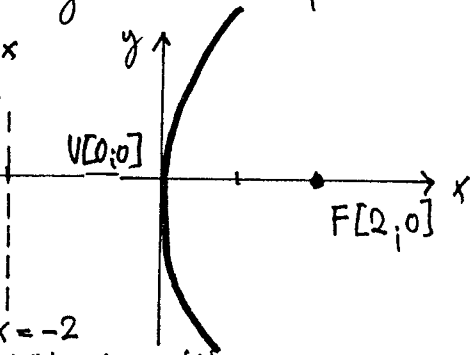
↓

$\frac{p}{2} = 2$

$p = 4$

$2p = 8$ → $y^2 = 2px$

$\boxed{y^2 = 8x}$



$x = -2$

je řídící přímka

b) F[-3;0] – řešíme podle 4 ... F[-3;0]

$-\frac{p}{2}=-3$

$p=6$ ... $-2p=-12$

$y^2=-2px$ ... $\boxed{y^2=-12x}$

---

c) F[0;$\frac{1}{2}$] podle 1 $x^2=2py$

$\downarrow$

$\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$

$p=1$ $\nearrow$ $2p=2$

$\boxed{x^2=2y}$

---

d) F[0;−4] podle 2, orientace −y

$\downarrow$

$-\frac{p}{2}=-4$

$p=8$ $\nearrow$ $-2p=-16$

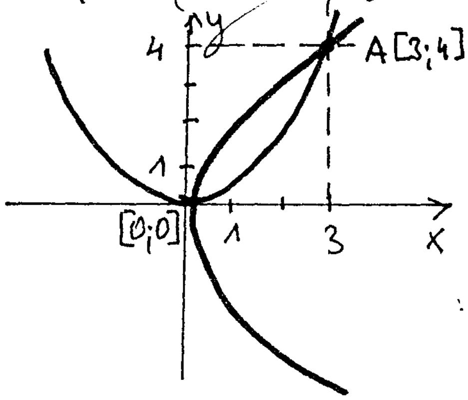
$x^2=-2py$

$\boxed{x^2=-16y}$

---

② Napište osovou rovnici paraboly, která prochází bodem:

a) A[3;4] musíme rozlišit dvě orientace



a) +y ... $x^2=2py$

$9=2p\cdot 4$

$2p=\frac{9}{4}$

$\boxed{x^2=\frac{9}{4}y}$

A[3;4]
x y

b) +x $y^2=2px$

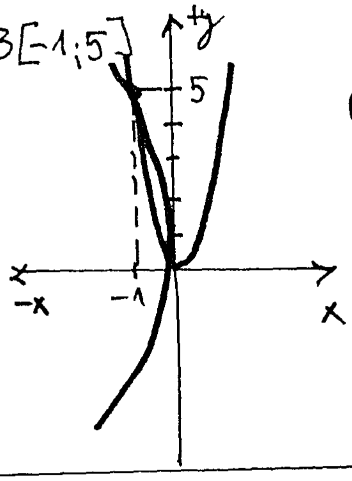
$16=2p\cdot 3$

$2p=\frac{16}{3}$

$\boxed{y^2=\frac{16}{3}x}$

---

b) B[−1;5]



Orientace

+y $x^2=2py$

$1=2p\cdot 5$

$2p=\frac{1}{5}$

$\boxed{x^2=\frac{1}{5}y}$

−x $y^2=-2px$

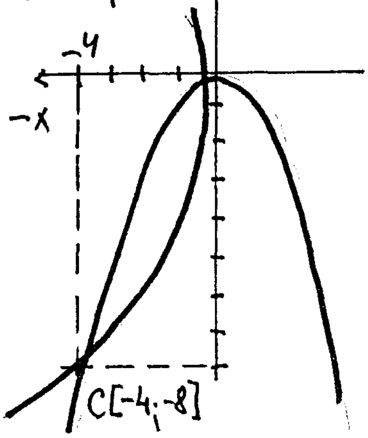
$25=-2p\cdot(-1)$

$2p=25$

$-2p=-25$

$\boxed{y^2=-25x}$

c) $[-4;-8]$

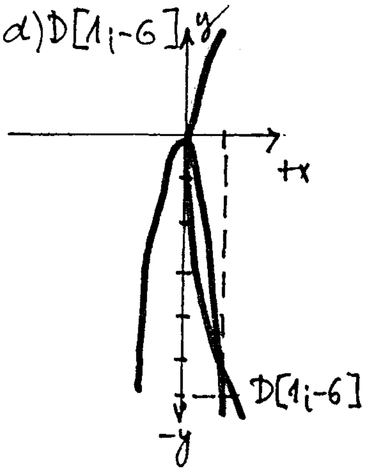


Orientace

$-y$	$-x$
$x^2=-2py$	$y^2=-2px$
$16=-2p.(-8)$	$64=-2p.(-4)$
$16=2p.8$	$64=2p.4$
$2p=2$	$2p=16$
$-2p=-2$	$-2p=-16$
$\boxed{x^2=-2y}$	$\boxed{y^2=-16x}$

---

d) $D[1;-6]$



Orientace

$-y$	$+x$
$x^2=2py$	$y^2=2px$
$1=2p.(-6)$	$36=2p.1$
$2p=-\frac{1}{6}$	$2p=36$
$\boxed{x^2=-\frac{1}{6}y}$	$\boxed{y^2=36x}$

---

③ Určete vzájemnou polohu přímky a paraboly, je-li:

a) $y^2=6x$, $x+y-2=0$

$(-x+2)^2=6x \leftarrow y=-x+2$

$x^2-4x+4-6x=0$

$x^2-10x+4=0$

$D=b^2-4ac$

$D=100-16=84$

$84>0 \ldots D>0 \ldots$ úloha, resp. kvadratická rovnice má 2 řešení $\Rightarrow$ existují dva průsečíky přímky s parabolou – <u>přímka je sečnou paraboly</u>.

---

b) $y^2=-3x$ $\quad 3x+2y-8=0 \ \ldots \ 2y=-3x+8$

$(-\frac{3}{2}x+4)^2=-3x \leftarrow y=-\frac{3}{2}x+4$

$\frac{9}{4}x^2-12x+16+3x=0$

$\frac{9}{4}x^2-9x+16=0 \quad |.4$

$9x^2-36x+64=0$

$D=36^2-4.9.64=-1008$

$D<0 \Rightarrow$ Kv. rovnice nemá řešení.. $\Rightarrow$ <u>vnější přímka paraboly</u>

c) $y^2=2x$ $\qquad 2x-2y+1=0$

$$2y=2x+1$$
$$y=x+\frac{1}{2}$$

$(x+\frac{1}{2})^2=2x$

$x^2+x+\frac{1}{4}-2x=0$

$x^2-x+\frac{1}{4}=0 \quad |\cdot 4$

$4x^2-4x+1=0$

$D=16-16=0$

$D=0$ ... tzv. rovnice má 1 řešení $\Rightarrow$ přímka je tečnou paraboly.

④ Určete délku tětivy, kterou vytíná parabola na přímce:

a) $y^2=8x$ $\qquad x-y-2=0$

$(x-2)^2=8x \qquad \leftarrow \qquad y=x-2$

$x^2-4x+4-8x=0$

$x^2-12x+4=0$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-16}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{128}}{2}=\frac{12\pm4\cdot\sqrt8}{2}=6\pm2\sqrt8$$

$x_1=6+2\sqrt8$, $y_1=6+2\sqrt8-2=4+2\sqrt8$ $\qquad A[6+2\cdot\sqrt8;\ 4+2\cdot\sqrt8]$

$x_2=6-2\sqrt8$, $y_2=6-2\sqrt8-2=4-2\sqrt8$ $\qquad B[6-2\cdot\sqrt8;\ 4-2\sqrt8]$

$\vec{u}=A-B=(6+2\sqrt8-6+2\sqrt8;\ 4+2\sqrt8-4+2\sqrt8)$

$\vec{u}=(4\cdot\sqrt8;\ 4\cdot\sqrt8)$ délka tětivy je $|AB|=|\vec{u}|$

$$|\vec{u}|=\sqrt{(4\cdot\sqrt8)^2+(4\sqrt8)^2}=\sqrt{16\cdot8+16\cdot8}=\sqrt{128+128}=\sqrt{256}=16$$

Tětiva má délku 16.

b) $x^2=4y$ $\qquad y=2x-3$

$x^2=4\cdot(2x-3)$

$x^2=8x-12$

$x^2-8x+12=0$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}$$

$x_1=6$, $y_1=2\cdot6-3=9$ $\qquad A[6;9]$

$x_2=2$, $y_2=2\cdot2-3=1$ $\qquad B[2;1]$

$\vec{u}=A-B=(4;8)$

viz dr. mach ⑤

délka tětivy: $|AB|=|\vec{u}|=$ 4 $=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}$ ... $\boxed{|AB|=4\cdot\sqrt5}$

⑤ Určete c tak, aby přímka $2x + y + c = 0$ byla tečnou paraboly $y^2=6x$.

$y = -2x - c$

$y^2 = 6x$

$(-2x-c)^2 = 6x$

$4x^2 + 4cx + c^2 - 6x = 0$

$\underset{a}{4x^2} + \underset{b}{(4c-6)}\cdot x + \underset{c}{c^2} = 0$

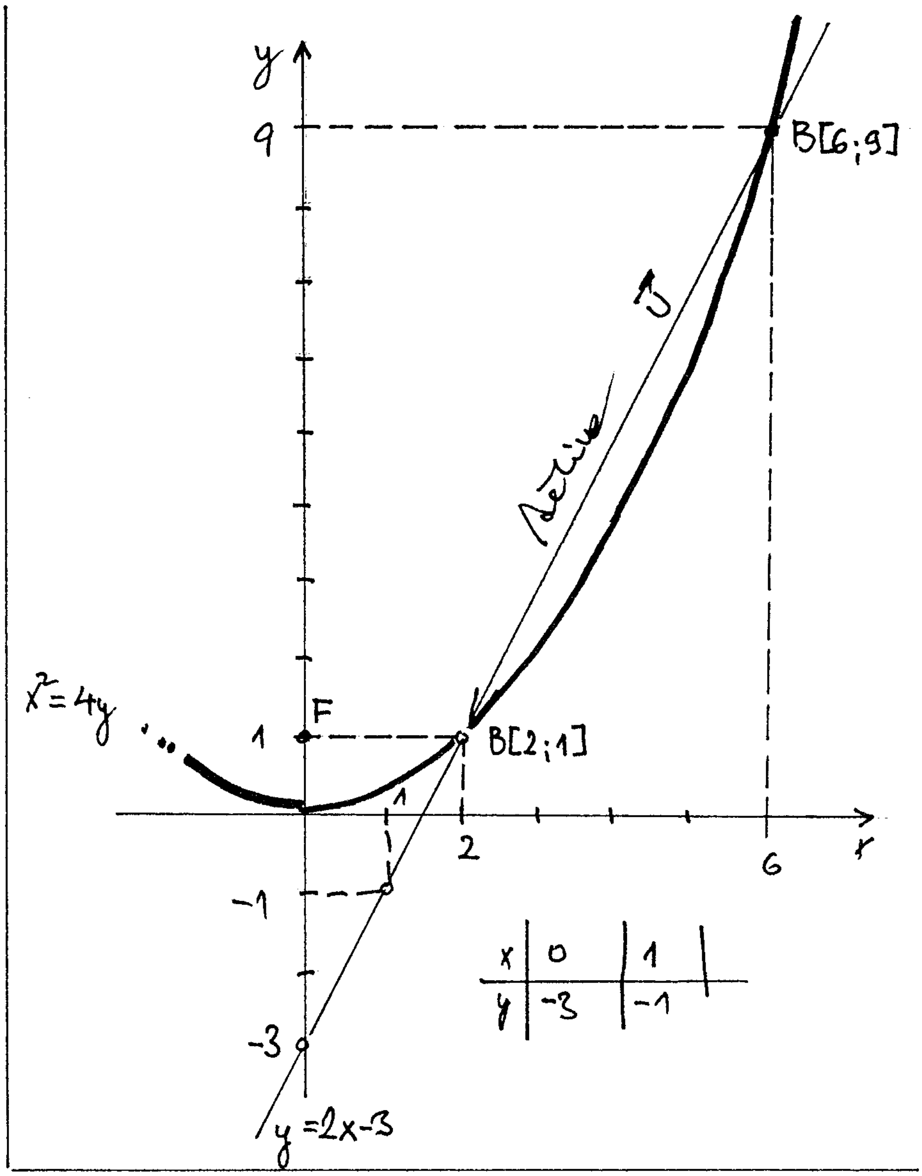
$D = b^2 - 4ac = 0$

$(4c-6)^2 - 16c^2 = 0$

$16c^2 - 48c + 36 - 16c^2 = 0$

$48c = 36$

$\boxed{c = \frac{3}{4}}$



⑥ Veďte k parabole $x^2=-4y$ tečnu kolmou na přímku $y = -\frac{1}{3}x + 7$.

$y = \boxed{-\frac{1}{3}}\, x + 7$ je směrnice dané přímky. Kolmice k ní bude mít směrnici $-\frac{1}{k}$, což je 3. Požadovaná tečna bude mít rovnici $y = 3x + q$; dosaďme do rovnice paraboly:

$x^2 = -4(3x+q)$

$x^2 = -12x - 4q$

$\underset{a=1}{x^2} + \underset{b}{12x} + \underset{c}{4q} = 0$

$D = b^2 - 4ac$ (=0, jde o tečnu)

$D = 144 - 16q$ ... $144 - 16q = 0$

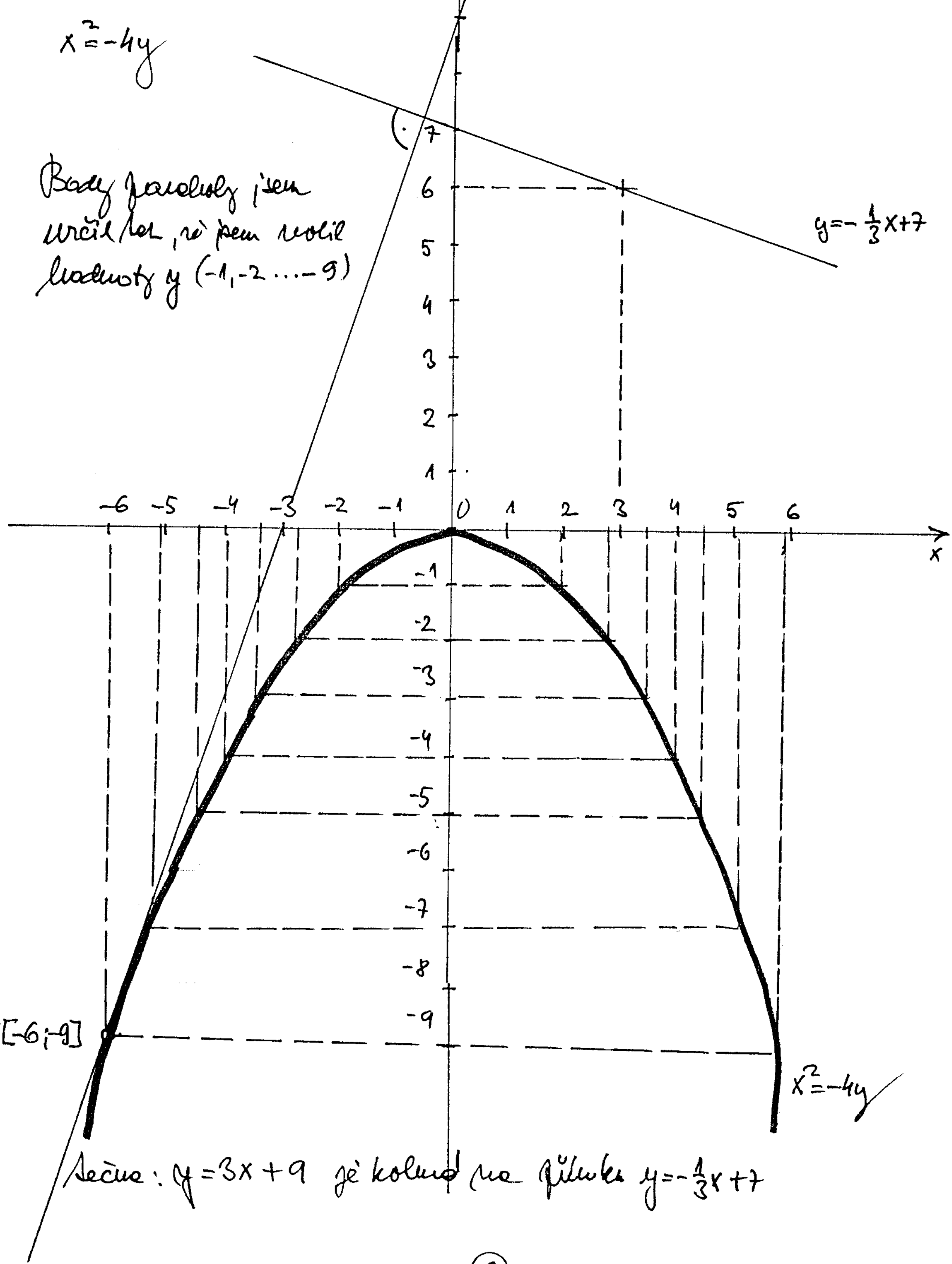
$16q = 144$

$q = 9$

$\boxed{y = 3x + 9}$ nad rámec požadavku úlohy zakreslíme graf. Uvádíme kvůli dotyku.

$x^2 = -4y$

Body paraboly jsem určil tak, že jsem volil hodnoty y $(-1, -2 \ldots -9)$



Tečna: $y = 3x + 9$ je kolmá na přímku $y = -\frac{1}{3}x + 7$

7) Určete p tak, aby přímka $3x-y-6=0$ byla tečnou paraboly $x^2=2py$.

$y=3x-6 \qquad x^2=2py$

$\frac{x^2}{2p}=3x-6 \;|\cdot 2p \leftarrow y=\frac{x^2}{2p}$

$x^2=6px-12p$

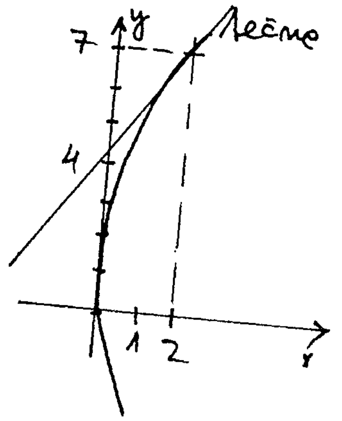
$\rightarrow \underbrace{1}_{a}x^2\underbrace{-6p}_{b}x+\underbrace{12p}_{c}=0$

$D=b^2-4ac=36p^2-48p=0 \quad |:p$

$36p-48=0$

$36p=48 \rightarrow \boxed{p=\frac{4}{3}}$

8) Najděte rovnici paraboly, která má osu v ose x a vrchol v počátku, a její tečna je $3x-2y+8=0$.



Podle polohy tečny určíme orientaci paraboly, ta je $+x$. Pro ni platí rovnice $y^2=2px$.

$2y=3x+8$

$y=\frac{3}{2}x+4$, dosadíme do rovnice paraboly.

$\left(\frac{3}{2}x+4\right)^2=2px \rightarrow \frac{9}{4}x^2+12x+16-2px=0 \;|\cdot 4$

$9x^2+48x+64-8px=0$

$\underbrace{9}_{a}x^2+\underbrace{(48-8p)}_{b}\cdot x\underbrace{+64}_{c}=0$

$D=b^2-4ac \;(=0)$

$(48-8p)^2-2304=0$

$\cancel{2304}-768p+64p^2-\cancel{2304}=0$

$64p^2-768p=0 \;|:32p \rightarrow 2p=24$

$y^2=2px \;\ldots\; \boxed{y^2=24x}$

9) Najděte rovnici tečny paraboly $y^2=9x$, která je rovnoběžná s přímkou $5x-3y-2=0$.

$3y=5x-2$

$y=\boxed{\frac{5}{3}}x-\frac{2}{3}$

$\rightarrow$ to je i směrnice tečny: $y=\frac{5}{3}x+q$

$$y^2 = 9x$$

$$\left(\frac{5}{3}x + q\right)^2 - 9x = 0$$

$$\frac{25}{9}x^2 + \frac{10}{3}qx + q^2 - 9x = 0$$

$$25x^2 + 30qx + 9q^2 - 81x = 0$$

$$\underbrace{25}_{a}x^2 + \underbrace{(30q - 81)}_{b}x + \underbrace{9q^2}_{c} = 0$$

$$D = (30q - 81)^2 - 900q^2 = 0$$

$$\cancel{900q^2} - 4860q + 6561 - \cancel{900q^2} = 0$$

$$4860q = 6561$$

$$q = \frac{6561}{4860} = \frac{27}{20}$$

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{27}{20} \quad |\cdot 60$$

$$60y = 100x + 81$$

$$\boxed{100x - 60y + 81 = 0}$$ je rovnice tečny.

KONEC ČLÁNKU 4.9 A KONEC SBÍRKY PRO OA