2.2 Kombinace

① Napište všechny kombinace a) druhé, b) třetí třídy z prvků a, b, c, d.

__Definice__ : k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet kombinací určuje kombinační číslo:

$\underline{C_k(n)}$ nebo $K(k;n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, např. $\binom{5}{3} = \dfrac{5.4.3}{3.2.1} = 10$

$\longrightarrow$ je ve sbírce

Dále víme, že

$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{n} = 1$	$\binom{0}{0} = 1$

Počet kombinací na kalkulačce CASIO: $\binom{10}{4} =$ $\boxed{10}$ $\boxed{nCr}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ ... 210

Další poznatky:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, např. $\binom{50}{45} = \binom{50}{50-45} = \binom{50}{5}$ ... počet doplňkových komb.

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, např. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$

Počet kombinací s opakováním: $K'(k;n) = \binom{n+k-1}{k}$

__Řešení__ př. ① a) a,b ; a,c ; a,d ; b,c ; b,d ; c,d

Jejich počet je $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \dfrac{4.3}{2.1} = 6$ nebo pomocí

kalkulačky : $\binom{4}{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{nCr}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ ... 6

b) a,b,c ; a,b,d ; a,c,d ; b,c,d ... $\binom{4}{3} = 4$

---

② a) $\binom{10}{4} = \boxed{210}$ b) $\binom{20}{4} = \dfrac{20.19.18.17}{4.3.2.1} = \boxed{4835}$

Text ②: Kolik kombinací 4. třídy je možné utvořit a) z 10 prvků, b) z 20 prvků?

③ Ve třídě je 30 žáků, z nichž budou tři zkoušeni. Kolikerým způsobem je to možné?

$C_3(30) = \binom{30}{3} = \boxed{4060 \text{ způsoby}}$ (4060 neuspořádaných trojic)

---

④ Ve třídě je 22 dívek a 9 chlapců. Kolikerým způsobem je možné vytvořit delegaci, aby v ní byly(i)

a) dvě dívky a dva chlapci, b) tři dívky a jeden chlapec?

Při řešení použijeme <u>kombinatorické pravidlo součinu</u>:

V včelíně jsou otevřená 4 okna. Po vletění včely bylo 10 oken zavřeno. Kolik existuje celkem možných pohybů včely do včelína a z včelína?

Při vletu dovnitř měla včela 4 možnosti.

Při výletu ven " " 3 " .

<u>Celkem měla 12 možností různých pohybů</u> (12=4·3)

V našem případě platí:

a) $C_2(22)\cdot C_2(9) = \binom{22}{2}\cdot\binom{9}{2} = 231\cdot 36 = \boxed{8\,316}$ různých delegací

b) $C_3(22)\cdot C_1(9) = \binom{22}{3}\cdot\binom{9}{1} = 1540\cdot 9 = \boxed{13\,860}$ -"- -"-

---

⑤ V urně (lépe osudí) je 8 bílých a 10 černých koulí. Kolikerým způsobem je možné vytáhnout

a) 2 bílé a 1 černou kouli b) 2 bílé a 2 černé koule,

c) 3 bílé a 2 černé koule d) 2 bílé a 3 černé koule?

a) $\binom{8}{2}\cdot\binom{10}{1} = 28\cdot 10 = \boxed{280}$ b) $\binom{8}{2}\cdot\binom{10}{2} = 28\cdot 45 = \boxed{1260}$

c) $\binom{8}{3}\cdot\binom{10}{2} = 50\cdot 45 = \boxed{2520}$ d) $\binom{8}{2}\cdot\binom{10}{3} = 28\cdot 120 = \boxed{3360}$

---

⑥ Jestliže má jistý muž 5 kalhot, 8 košil, 5 sak a 7 kravat, kolikerým způsobem se může obléci?

$\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{1} = 5.8.5.7 = \boxed{1400}$ způsoby

---

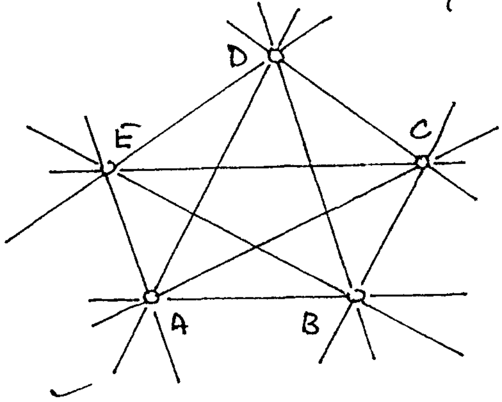
7. Učitel má k dispozici 15 snadných a 12 obtížnějších příkladů. Na písemnou práci chce vybrat 2 snadné a 2 obtížnější příklady. Kolik písemných prací může sestavit?

$C_2(15)\cdot C_2(12) = \binom{15}{2}\cdot\binom{12}{2} = 105.66 = \boxed{6930}$ písemek

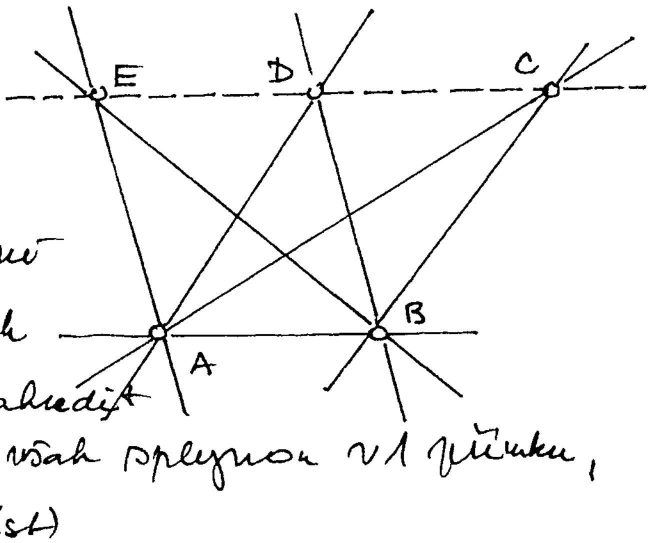
---

8. Kolik přímek je určeno 5 body, jestliže
a) žádné tři neleží v jedné přímce,
b) 3 body leží na jedné přímce.

Řešení a): Situaci nám přiblíží obrázek. Protože přímka je určena dvěma body, tak platí:



$C_2(5) = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{2.1} = \boxed{10 \text{ přímek}}$



Řešení b: viz obrázek

Všech přímek je $\binom{5}{2} = 10$ včetně tří přímek ED, EC, DC. Ty však musíme z 10 odečíst a nahradit je jednou přímkou (3 přímky však splynou v 1 přímku, tu musíme naopak přičíst)

$k = \binom{5}{2} - \binom{3}{2} + 1 = 10 - 3 + 1 = \boxed{8 \text{ přímek}}$

---

9. Je dáno 12 různých bodů v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině. a) Kolik rovin jimi lze proložit. b) Kolik rovin jimi lze proložit, leží-li 4 body v jedné rovině?

Vyjdeme z poznatku, že rovina je určena 3 body. Následující výpočet se opírá o obdobnou úvahu, jakou jsme vyslovili v úloze (8).

a) $\binom{12}{3} = \boxed{220 \text{ rovin}}$

b) $\binom{12}{3} - \binom{4}{3} + 1 = 220 - 4 + 1 = \boxed{217 \text{ rovin}}$

---

(10) Trenér tenisového družstva má k dispozici 6 tenistů a 5 tenistek. V turnaji mají sehrát celkem 7 utkání, 2 mužské dvouhry, 2 ženské dvouhry, mužskou čtyřhru, ženskou čtyřhru a smíšenou čtyřhru. Kolik různých sestav může trenér vytvořit?

Počet mužů je 6, počet žen = 5

a) mužské dvouhry – počet dvojic hráčů je $\binom{6}{2} = 15$, hraje se 2krát, počet dvojic je $15 + 15 = \boxed{30}$

b) ženské dvouhry – počet dvojic hráček je $\binom{5}{2} = 10$, hraje se 2krát, počet dvojic je $10 + 10 = \boxed{20}$

c) mužská 4hra – počet čtveřic ze 6 hráčů je $\binom{6}{4} = \boxed{15}$

d) ženská 4hra – " " z 5 hráček je $\binom{5}{4} = \boxed{5}$

u čtveřic nezáleží na tom, na které straně kdo hraje, jde pouze o složení čtveřice

e) Smíšená 4hra je tvořena 2 muži a 2 ženami a podle kombinatorického pravidla součinu platí, že počet čtveřic je

$\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = 15 . 10 = \boxed{150}$

a pro vytvoření sestav opět platí komb. pravidlo součinu:

$30 . 20 . 15 . 5 . 150 = 600 . 75 . 150 = 45000 . 150 = \boxed{6\,750\,000 \text{ sestav}}$.

Ve sbírce je chybně uvedeno 675000.

(11) Z kolika prvků je možné vytvořit 45 kombinací 2. třídy?

$$\binom{x}{2} = 45$$

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2\cdot 1} = 45$$

$$x^2 - x = 90$$

$$x^2 - x - 90 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{2} = \frac{1 \pm 19}{2} = \begin{cases} 10 \\ -9 \end{cases}$$

-9 (nevyhovuje, neboť počet prvků lze vyjádřit jen přir. číslem)

$\boxed{\text{Z 10 prvků.}}$

---

(12) Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet kombinací 3. třídy o 36. Kolik je prvků?

$$\binom{n+1}{3} > \binom{n}{3} \dots \text{o } 36$$

$$\binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = 36$$

$$\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3.2.1} - \frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{3.2.1} = 36 \qquad |\cdot 6$$

$$(n+1)\cdot \underline{n\cdot(n-1)} - \underline{n\cdot(n-1)}\cdot(n-2) = 216$$

$$n(n-1)\cdot\left[(n+1)-(n-2)\right] = 216$$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n+1-n+2) = 216$$

$$n\cdot(n-1)\cdot 3 = 216 \qquad |:3$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} \boxed{9 \text{ prvků}} \\ -8 \text{ (nevyhovuje)} \end{cases}$$

Zkouška: $\binom{9+1}{3} = 120$; $\binom{9}{3} = 84$; $120 - 84 = 36$

---

(13) Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací 2. třídy o 34. Kolik je prvků?

$$\binom{n+4}{2} > \binom{n}{2} \dots \text{o } 34$$

$$\binom{n+4}{2} - \binom{n}{2} = 34$$

$$\frac{(n+4)\cdot(n+3)}{2.1} - \frac{n(n-1)}{2.1} = 34 \quad |\cdot 2$$

$$(n+4)\cdot(n+3) - n(n-1) = 68$$

$$n^2 + 7n + 12 - n^2 + n = 68$$

$$8n = 56$$

$$n = \boxed{7 \text{ prvků}}$$

---

(14) Z kolika prvků je možné vytvořit 6krát více kombinací 4. třídy než kombinací 2. třídy?

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{2}\cdot 6$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4.3.2.1} = \frac{n(n-1)}{2.1}\cdot 6 \quad |\cdot 24$$

$$\cancel{n\cdot(n-1)}\cdot(n-2)\cdot(n-3) = \cancel{n\cdot(n-1)}\cdot 72$$

$$(n-2)\cdot(n-3) = 72$$

$$n^2 - 5n + 6 = 72$$

$$n^2 - 5n - 66 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{5 \pm 17}{2} = \begin{cases} 11 & \dots \boxed{11 \text{ prvků}} \\ -6 & \text{(nevyhovuje)} \end{cases}$$

KONEC ČLÁNKU 2.2