2.4 Binomická věta

$$(a \pm b)^n =$$

$$\binom{n}{0} a^n \cdot b^0 \pm \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n$$

se vynechává, neboť $a^0 = 1$, $b^0 = 1$

neví se, který je sudý a který lichý, proto nepíšu $\pm$!

U dvojčlenu $(a-b)^5 = \underbrace{a^5}_{\text{lichý}} \underbrace{-5a^4b^1}_{\text{sudý}} \underbrace{+10a^3b^2}_{\text{lichý}} \underbrace{-10a^2b^3}_{\text{sudý}} \underbrace{+5a^1b^4}_{\text{lichý}} \underbrace{-b^5}_{\text{sudý}}$

Všeobecně platí: Je-li v dvojčlenu mínus, pak každý lichý člen je kladný a každý sudý člen záporný.

① Podle binomické věty proveďte:

a) $(x+1)^6$ … po řádcích provedeme výpočet složitě.

$$(x+1)^6 = \binom{6}{0} \cdot x^6 \cdot 1^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot 1^1 + \binom{6}{2} \cdot x^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{3} \cdot x^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} \cdot x^2 \cdot 1^4 +$$
$$\binom{6}{5} \cdot x^1 \cdot 1^5 + \binom{6}{6} x^0 \cdot 1^6 =$$
$$= 1 \cdot x^6 \cdot 1 + 6x^5 \cdot 1 + 15x^4 \cdot 1 + 20x^3 \cdot 1 + 15x^2 \cdot 1 + 6x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= \underline{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

---

b) $$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 y^0 + \binom{5}{1} x^4 y^1 + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} x^0 y^5 =$$
$$= \underline{x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5}$$

Poznámka: Ve výsledcích sbírky jsou 2 chyby na konci výsledku … $5xy^2 + y^3$.

---

c) $(x-y)^4 = \binom{4}{0} x^4 y^0 - \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 - \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4 = \underline{x^4 - 4x^3y +}$
$\underline{+ 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4}$

①

d) $(x-1)^8$ ... umocníme zjednodušeným (zkráceným) postupem.

$$(x-1)^8 = \underline{x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1}$$

---

② Podle binomické věty vypočítejte:

a) $(x+y)^6 - (x-y)^6 =$

$$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 - 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 -$$
$$-(x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6) =$$
$$= \cancel{x^6} + 6x^5y + \cancel{15x^4y^2} + 20x^3y^3 + \cancel{15x^2y^4} + 6xy^5 + \cancel{y^6} -$$
$$\cancel{-x^6} + 6x^5y - \cancel{15x^4y^2} + 20x^3y^3 - \cancel{15x^2y^4} + 6xy^5 - \cancel{y^6} =$$
$$= 2\cdot 6x^5y + 2\cdot 20x^3y^3 + 2\cdot 6xy^5 = \underline{12x^5y + 40x^3y^3 + 12xy^5}$$

---

b) $(x-3y)^4 - (x+3y)^4$

$$\binom{4}{0}\cdot x^4\cdot(3y)^0 - \binom{4}{1}x^3\cdot(3y)^1 + \binom{4}{2}x^2\cdot(3y)^2 - \binom{4}{3}\cdot x\cdot(3y)^3 + \binom{4}{4}\cdot x^0\cdot(3y)^4$$
$$-\left[\binom{4}{0}\cdot x^4\cdot(3y)^0 + \binom{4}{1}x^3(3y)^1 + \binom{4}{2}x^2\cdot(3y)^2 + \binom{4}{3}x\cdot(3y)^3 + \binom{4}{4}x^0\cdot(3y)^4\right] =$$
$$= 1\cdot x^4\cdot 1 \quad - 4\cdot x^3\cdot 3y \quad + 6x^2\cdot 9y^2 \quad - 4x\cdot 27y^3 \quad + 1\cdot 1\cdot 81y^4$$
$$- 1\cdot x^4\cdot 1 \quad - 4x^3\cdot 3y \quad - 6x^2\cdot 9y^2 \quad - 4x\cdot 27y^3 \quad - 1\cdot 1\cdot 81y^4 =$$
$$= \cancel{x^4} - 12x^3y + \cancel{54x^2y^2} - 108xy^3 + \cancel{81y^4} -$$
$$\cancel{-x^4} - 12x^3y - \cancel{54x^2y^2} - 108xy^3 - \cancel{81y^4} = -2\cdot 12x^3y - 2\cdot 108xy^3 =$$
$$= \underline{-24x^3y - 216xy^3}$$

---

c) $(2x-y)^5 + (2x+y)^5 =$

$$\binom{5}{0}\cdot(2x)^5\cdot y^0 - \binom{5}{1}\cdot(2x)^4\cdot y^1 + \binom{5}{2}\cdot(2x)^3y^2 - \binom{5}{3}\cdot(2x)^2y^3 + \binom{5}{4}\cdot(2x)^1\cdot y^4 - \binom{5}{5}\cdot(2x)^0y^5 +$$
$$+ \binom{5}{0}\cdot(2x)^5y^0 + \binom{5}{1}\cdot(2x^4)\cdot y^1 + \binom{5}{2}\cdot(2x^3)y^2 + \binom{5}{3}\cdot(2x)^2y^3 + \binom{5}{4}\cdot(2x)^1y^4 + \binom{5}{5}\cdot(2x)^0y^5 =$$
$$= 32x^5 - \cancel{5\cdot 16x^4y} + 10\cdot 8x^3y^2 - \cancel{10\cdot 4x^2y^3} + 5\cdot 2x\cdot y^4 - \cancel{y^5} +$$
$$32x^5 + \cancel{5\cdot 16x^4y} + 10\cdot 8x^3y^2 + \cancel{10\cdot 4x^2y^3} + 5\cdot 2xy^4 + \cancel{y^5} =$$
$$= \underline{64x^5 + 160x^3y^2 + 20xy^4}$$

Pamatuj jako! Viz: $(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^5}$

d) $\underbrace{(x+2)^7}_{A} - \underbrace{(x-2)^7}_{B}$ vypočítáme odděleně

$A = (x+2)^7 =$

$\binom{7}{0}\cdot x^7\cdot 2^0 + \binom{7}{1}x^6\cdot 2^1 + \binom{7}{2}x^5\cdot 2^2 + \binom{7}{3}x^4\cdot 2^3 + \binom{7}{4}x^3\cdot 2^4 + \binom{7}{5}x^2\cdot 2^5 + \binom{7}{6}x^1\cdot 2^6 + \binom{7}{7}x^0\cdot 2^7 =$

$= x^7 + 7x^6\cdot 2 + 21x^5\cdot 4 + 35x^4\cdot 8 + 35x^3\cdot 16 + 21x^2\cdot 32 + 7x\cdot 64 + 128 =$

$= x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$

$B = (x-2)^7 =$

$x^7 - 14x^6 + 84x^5 - 280x^4 + 560x^3 - 672x^2 + 448x - 128$

$A - B = (x+2)^7 - (x-2)^7$

$\cancel{x^7} + 14x^6 + \cancel{84x^5} + 280x^4 + \cancel{560x^3} + 672x^2 + \cancel{448x} + 128$

$\cancel{-x^7} + 14x^6 \cancel{-84x^5} + 280x^4 \cancel{-560x^3} + 672x^2 \cancel{-448x} + 128$

$= \underline{28x^6 + 560x^4 + 1344x^2 + 256}$

3 Podle binomické věty vypočítejte.

a) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^4 =$

$= \binom{4}{0}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^0 + \binom{4}{1}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^1 + \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^3 +$

$+ \binom{4}{4}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{y}{3}\right)^4 =$

$= \frac{x^4}{16} + 4\cdot\frac{x^3}{8}\cdot\frac{y}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{4}\cdot\frac{y^2}{9} + 4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y^3}{27} + \frac{y^4}{81} =$

$= \underline{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{6}x^2y^2 + \frac{2}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4}$ je to vhodnější tvar výsledku než na stránce.

b) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^5 = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^0 - \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^1 + \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2 -$

$- \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^4 - \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^5 =$

$= \frac{x^5}{243} - 5\cdot\frac{x^4}{81}\cdot\frac{y}{2} + 10\cdot\frac{x^3}{27}\cdot\frac{y^2}{4} - 10\cdot\frac{x^2}{9}\cdot\frac{y^3}{8} + 5\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{y^4}{16} - \frac{y^5}{32} =$

$\underline{\frac{1}{243}x^5 - \frac{5}{162}x^4y + \frac{5}{54}x^3y^2 - \frac{5}{36}x^2y^3 + \frac{5}{48}xy^4 - \frac{1}{32}y^5}$

④ Podle binomické věty určete:

a) $(\sqrt2+\sqrt3)^6=\binom{6}{0}.(\sqrt2)^6.(\sqrt3)^0+\binom{6}{1}.(\sqrt2)^5(\sqrt3)^1+\binom{6}{2}.(\sqrt2)^4.(\sqrt3)^2+$

$+\binom{6}{3}.(\sqrt2)^3.(\sqrt3)^3+\binom{6}{4}.(\sqrt2)^2.(\sqrt3)^4+\binom{6}{5}.(\sqrt2)^1.(\sqrt3)^5+\binom{6}{6}.(\sqrt2)^0.(\sqrt3)^6=$

$=(\sqrt2)^6+6.(\sqrt2)^5.\sqrt3+15.(\sqrt2)^4.(\sqrt3)^2+20.(\sqrt2)^3.(\sqrt3)^3+15.(\sqrt2)^2.(\sqrt3)^4+$

$+6.\sqrt2.(\sqrt3)^5+(\sqrt3)^6=$

$=2^{\frac{6}{2}}+6\sqrt{2^5}.\sqrt3+15.2^{\frac{4}{2}}.3+20\sqrt{2^3}.\sqrt{3^3}+15.2.3^{\frac{4}{2}}+6.\sqrt2.\sqrt{3^5}.3^{\frac{6}{2}}=$

$=2^3+6\sqrt{2^4.2}.\sqrt3+15.2^2.3+20.\sqrt{2^2.2}.\sqrt{3^2.3}+15.2.3^2+6\sqrt2.\sqrt{3^4.3}+3^3=$

$=8+6.4\sqrt2.\sqrt3+180+20.2\sqrt2.3.\sqrt3+270+6.\sqrt2.9.\sqrt3+27=$

$=485+24\sqrt2.\sqrt3+120.\sqrt2.\sqrt3+54\sqrt2.\sqrt3=$

$=485+24.\sqrt6+120.\sqrt6+54.\sqrt6=\underline{485+198.\sqrt6}$

Správnost výsledku lze ověřit na kalkulačce.

---

b) $(\sqrt2-2\sqrt3)^4=\binom{4}{0}.(\sqrt2)^4.(2.\sqrt3)^0-\binom{4}{1}(\sqrt2)^3.(2.\sqrt3)^1+\binom{4}{2}.(\sqrt2)^2.(3.\sqrt3)^2-$

$-\binom{4}{3}.(\sqrt2)^1.(2\sqrt3)^3+\binom{4}{4}.(\sqrt2)^0.(2\sqrt3)^4=2^{\frac{4}{2}}-4.\sqrt{2^3}.2\sqrt3+$

$+6.2.4.\sqrt{3^2}-4\sqrt2.8\sqrt{3^3}+16\sqrt{3^4}=$

$=2^2-8.\sqrt{4.2}.\sqrt3+48.3-4\sqrt2.8\sqrt{9.3}+16.3^{\frac{4}{2}}=$

$=4-8.2\sqrt2\sqrt3+144-32.\sqrt2.3.\sqrt3+16.3^2=$

$=4-16\sqrt6+144-96\sqrt6+144=\underline{292-112\sqrt6}$

---

c) $(3\sqrt2-2\sqrt3)^5-\binom{5}{0}.(3\sqrt2)^5.(2\sqrt3)^0-\binom{5}{1}.(3.\sqrt2)^4.2\sqrt3)^1+\binom{5}{2}.(3.\sqrt2)^3.(2\sqrt3)^2-$

$-\binom{5}{3}.(3.\sqrt2)^2.(2\sqrt3)^3+\binom{5}{4}.(3.\sqrt2)^1.(2\sqrt3)^4-\binom{5}{5}.(3\sqrt2)^0.(2\sqrt3)^5=$

$=243\sqrt{2^5}-5.81.2^{\frac{4}{2}}.2\sqrt3+10.27\sqrt{2^3}.4.(\sqrt3)^2-10.9(\sqrt2)^2.8.\sqrt{3^2}+$

$+5.3\sqrt2.16.3^{\frac{4}{2}}-32.\sqrt{3^5}=$

$=243.\sqrt{16.2}-405.4.2\sqrt3+270.\sqrt{4.2}.4.3-90.2.8.3\sqrt3+$

$15.\sqrt2.16.9-32\sqrt{81.3}=$

$=243.4.\sqrt2-3240\sqrt3+270.2\sqrt2.12-4320\sqrt3+2160\sqrt2-32.9.\sqrt3=$

$$243\cdot 4\sqrt{2} - 3240\cdot\sqrt{3} + 270\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 12 - 4320\sqrt{3} + 2160\cdot\sqrt{2} - 32\cdot 9\cdot\sqrt{3} =$$

$$972\sqrt{2} - 3240\cdot\sqrt{3} + 6480\cdot\sqrt{2} - 4320\sqrt{3} + 2160\sqrt{2} - 288\sqrt{3} =$$

$$\underline{9612\sqrt{2} - 7848\sqrt{3}}$$

---

d) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^7 = \binom{7}{0}(\sqrt{5})^7\cdot(\sqrt{3})^0 - \binom{7}{1}\cdot(\sqrt{5})^6\cdot(\sqrt{3})^1 + \binom{7}{2}\cdot(\sqrt{5})^5\cdot(\sqrt{3})^2 -$

$- \binom{7}{3}\cdot(\sqrt{5})^4\cdot(\sqrt{3})^3 + \binom{7}{4}\cdot(\sqrt{5})^3\cdot(\sqrt{3})^4 - \binom{7}{5}\cdot(\sqrt{5})^2\cdot(\sqrt{3})^5 +$

$+ \binom{7}{6}\cdot(\sqrt{5})^1\cdot(\sqrt{3})^6 - \binom{7}{7}\cdot(\sqrt{5})^0\cdot(\sqrt{3})^7 =$

$= \sqrt{5^7} - 7\cdot\sqrt{5^6}\cdot\sqrt{3} + 21\sqrt{5^5}\cdot 3 - 35\cdot\sqrt{5^4}\cdot\sqrt{3^3} + 35\cdot\sqrt{5^3}\cdot\sqrt{3^4} - 21\cdot 5\cdot\sqrt{3^5} +$

$+ 7\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3^6} - \sqrt{3^7} =$

$= \sqrt{5^6\cdot 5} - 7\cdot 5^{\frac{6}{2}}\cdot\sqrt{3} + 21\cdot\sqrt{5^4\cdot 5}\cdot 3 - 35\cdot 5^{\frac{4}{2}}\cdot\sqrt{9\cdot 3} + 35\cdot\sqrt{25\cdot 5}\cdot 3^{\frac{4}{2}} -$

$- 105\cdot\sqrt{3^4\cdot 3} + 7\cdot\sqrt{5}\cdot 3^{\frac{6}{2}} - \sqrt{3^6\cdot 3} =$

$= 5^3\cdot\sqrt{5} - 7\cdot 5^3\cdot\sqrt{3} + 21\cdot 5^2\cdot\sqrt{5}\cdot 3 - 35\cdot 5^2\cdot 3\cdot\sqrt{3} + 35\cdot 5\cdot\sqrt{5}\cdot 3^2 -$

$- 105\cdot 3^2\cdot\sqrt{3} + 7\cdot\sqrt{5}\cdot 3^3 - 3^3\cdot\sqrt{3} =$

$= 125\sqrt{5} - 875\sqrt{3} + 1575\cdot\sqrt{5} - 2625\sqrt{3} + 1575\cdot\sqrt{5} - 945\sqrt{3} + 189\sqrt{5} -$

$- 27\sqrt{3} = \underline{3464\sqrt{5} - 4472\sqrt{3}}$

---

5 Určete pátý člen rozvoje mocniny:

a) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{11} =$ Vyřešíme pomocí vzorce (jde-li o $(a-b)$, pak sudý člen je ⊖, lichý ⊕)

$$\boxed{\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}}$$

V našem případě je $n=11$, $k=5$

$$\binom{11}{5-1}\cdot x^{11-5+1}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{5-1} = \binom{11}{4}\cdot x^7\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 330x^7\cdot\frac{1}{x^4} = \boxed{330x^3}$$

---

b) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$ ... $n=8$, $k=5$ ... $= \binom{8}{5-1}\cdot(x^2)^{8-5+1}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{5-1} =$

$$\binom{8}{4}\cdot(x^2)^4\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^4 = 70x^8\cdot\frac{16}{x^4} = \boxed{1120x^4}$$

---

⑥ Určete 7. člen binomického rozvoje $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{10}$.

$n=10,\ k=7$

$$\binom{10}{7-1}\cdot(\sqrt{x})^{10-7+1}\cdot(\sqrt{y})^{7-1}=\binom{10}{6}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{4}\cdot\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{6}=210x^{\frac{4}{2}}\cdot y^{\frac{6}{2}}=\boxed{210x^2y^3}$$

⑦ Rozveďte užitím binomické věty výraz $(4x^2-\sqrt{x})^{10}$ a určete koeficient u x^8

$$(4x^2-\sqrt{x})^{10}=\left(4x^2-x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=$$
$$\binom{10}{0}\cdot(4x^2)^{10}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{0}$$
$$-\binom{10}{1}\cdot(4x^2)^{9}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{1}$$
$$+\binom{10}{2}\cdot(4x^2)^{8}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$$
$$-\binom{10}{3}\cdot(4x^2)^{7}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{3}$$
$$+\binom{10}{4}\cdot(4x^2)^{6}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{4}$$
$$-\binom{10}{5}\cdot(4x^2)^{5}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{5}$$
$$+\binom{10}{6}\cdot(4x^2)^{4}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6}$$
$$-\binom{10}{7}\cdot(4x^2)^{3}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{7}$$
$$+\binom{10}{8}\cdot(4x^2)^{2}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{8}=$$
$$\vdots$$
$$=45.16x^4\cdot x^4=\boxed{720}\,x^8$$

⑧ Určete 4. člen rozvoje výrazu

$\left(x^3-\frac{1}{x^4}\right)^6$ … $n=6,\ k=4$

Protože jde o sudý člen, tak bude záporný (viz str. ① pohled do závorky).

$$-\binom{6}{4-1}\cdot\left(x^3\right)^{6-4+1}\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)^{4-1}=$$
$$=-\binom{6}{3}\cdot\left(x^3\right)^3\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)^3=-20x^9\cdot\frac{1}{x^{12}}=$$
$$=-20\cdot\frac{x^9}{x^{12}}=-20\cdot\frac{\cancel{x^9}}{\cancel{x^9}\cdot x^3}=\boxed{-\frac{20}{x^3}}$$

nebo $\boxed{-20x^{-3}}$

⑨ Kolikátý člen rozvoje výrazu $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ obsahuje x^3?

1. člen $\binom{12}{0}\cdot(2x^2)^{12}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^0$ … x^{24}

2. člen $\binom{12}{1}\cdot(2x^2)^{11}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^1$ … $x^{22}\cdot\frac{1}{x}$ … x^{21}

3. člen $\binom{12}{2}\cdot(2x^2)^{10}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$ … $x^{20}\cdot\frac{1}{x^2}$ … x^{18}

4. člen $\binom{12}{3}\cdot(2x^2)^{9}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3$ … $x^{18}\cdot\frac{1}{x^3}$ … x^{15}

} diference v exp. je pokaždé 3

5. člen … x^{12}, 6. člen … x^9, 7. člen … x^6, 8. člen … x^3

Výraz x^3 obsahuje $\boxed{\text{8. člen}}$ binomického rozvoje.

(10) V rozvoji výrazu $\left(x^5 - \frac{1}{4}\right)^7$ určete koeficient členu obsahující člen a) x^{12}, b) x^{20}

$\binom{7}{0}\cdot(x^5)^7\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0$ dá x^{35}

$-\binom{7}{1}\cdot(x^5)^6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$ x^{30}

$+\binom{7}{2}\cdot(x^5)^5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$ x^{25}

$-\binom{7}{3}\cdot(x^5)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$ x^{20} ... koeficient je $-\frac{35}{4^2} = -\frac{35}{64}$

$+\binom{7}{4}\cdot(x^5)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$ x^{15}

$-\binom{7}{5}\cdot(x^5)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$ x^{10}

$+\binom{7}{6}\cdot(x^5)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6$ x^{5}

$-\binom{7}{7}\cdot(x^5)^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7$ x^{0}

Odpověď:

a) žádný

b) $\boxed{-\frac{35}{64}}$

---

(11) V rozvoji výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$ určete prostý člen.

$\binom{6}{0}\cdot(2x^2)^6\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^0$

$\binom{6}{1}\cdot(2x^2)^5\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^1$

$\binom{6}{2}\cdot(2x^2)^4\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^2$

$\binom{6}{3}\cdot(2x^2)^3\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^3$

$\underbrace{\binom{6}{4}\cdot(2x^2)^2\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^4} = \binom{6}{4}\cdot 4x^4\cdot\frac{81}{x^4} = 15\cdot 4\cdot 81 = \boxed{4\,860}$

zde se zkrátí x ... abs. člen nesmí obsahovat proměnnou

---

(12) Pro jaké x je v rozvoji výrazu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ pátý člen roven 105?

$n = 10,\ k = 5$

$\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1} = 105$

$\binom{10}{5-1}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10-5+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 105$

$$\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 105$$

$$210 \cdot \frac{1}{64x^3}\cdot\frac{1}{16} = 105$$

$$\frac{210}{1024x^3} = 105$$

$$210 = 107520x^3$$

$$x^3 = \frac{210}{107520}$$

$$x^3 = \frac{1}{512}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{512}}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{8}}$$

---

* (13) Pro jaké x je v rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{4-2x}+\sqrt[6]{3-2x}\right)^9$ sedmý člen roven 168?

$$\left[(4-2x)^{\frac{1}{3}}+(3-2x)^{\frac{1}{6}}\right]^9 \quad \dots \; n=9,\; k=7$$

$$\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1} = 168$$

$$\binom{9}{6}\cdot\left[(4-2x)^{\frac{1}{3}}\right]^3\cdot\left[(3-2x)^{\frac{1}{6}}\right]^6 = 168$$

$$84\cdot(4-2x)\cdot(3-2x) = 168 \quad |:84$$

$$12-6x-8x+4x^2 = 2$$

$$4x^2-14x+10 = 0 \quad |:2$$

$$2x^2-7x+5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{9}}{4} = \begin{cases}\frac{5}{2} & \text{(nevyhovuje)}\\ 1\end{cases}$$

$$\boxed{x=1}$$

---

* (14) Vynechávám pro složitost jeho zadání a časovou náročnost při řešení.

Vypočítejte:

(15) a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = \underline{\binom{4}{0}\cdot x^4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^0} + \underline{\binom{4}{1}\cdot x^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^1} + \underline{\binom{4}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2} +$

$\underline{\binom{4}{3}\cdot x^1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3} + \underline{\binom{4}{4}\cdot x^0\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4} = x^4+4x^3\cdot\frac{1}{x}+6x^2\cdot\frac{1}{x^2}+4x\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4} =$

$\underline{\underline{x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}$ Správnost výsledku jsem si ověřil pro $x=8$.

b) $(2+\sqrt{2})^8 = \binom{8}{0}\cdot 2^8\cdot(\sqrt{2})^0 + \binom{8}{1}\cdot 2^7\cdot(\sqrt{2})^1 + \binom{8}{2}\cdot 2^6\cdot(\sqrt{2})^2 +$
$\binom{8}{3}\cdot 2^5\cdot(\sqrt{2})^3 + \binom{8}{4}\cdot 2^4\cdot(\sqrt{2})^4 + \binom{8}{5}\cdot 2^3(\sqrt{2})^5 + \binom{8}{6}\cdot 2^2\cdot(\sqrt{2})^6 +$
$\binom{8}{7}\cdot 2^1\cdot(\sqrt{2})^7 + \binom{8}{8}\cdot 2^0\cdot(\sqrt{2})^8 =$

$= 256 + 8.128\sqrt{2} + 28.64.2 + 56\cdot 32\cdot\sqrt{2^3} + 70.16.2^{\frac{4}{2}} +$
$+ 56.8\sqrt{2^5} + 28.4.2^{\frac{6}{2}} + 8.2\sqrt{2^7} + 2^{\frac{8}{4}} =$

$= 256 + 1024\sqrt{2} + 3584 + 56.32\cdot 2\sqrt{2} + 4480 + 448.4\sqrt{2} +$
$+ 896 + 16.8.\sqrt{2} + 16 =$

$= 256 + 1024\sqrt{2} + 3584 + 3584\sqrt{2} + 4480 + 1792.\sqrt{2} +$
$+ 896 + 128.\sqrt{2} + 16 =$

$= \boxed{9232 + 6528.\sqrt{2}}$ ... správnost ověřena

---

(16) Který člen rozvoje $\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^9$ obsahuje x^3?

	$\binom{9}{0}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^9\cdot(-2x)^0$	$\frac{1}{x^9}\cdot x^0$ obsahuje	$\frac{1}{x^9}$	
atd.	$\left(\frac{1}{x}\right)^8\cdot(-2x)^1$	$\frac{1}{x^8}\cdot x^1$	$\frac{1}{x^8}$	
	$\left(\frac{1}{x}\right)^7\cdot(-2x)^2$	$\frac{1}{x^7}\cdot x^2$	$\frac{1}{x^5}$	
4. člen	$\left(\frac{1}{x}\right)^6\cdot(-2x)^3$	$\frac{1}{x^6}\cdot x^3$	$\boxed{\frac{1}{x^3}}$	4. člen
	$\left(\frac{1}{x}\right)^5\cdot(-2x)^4$	$\frac{1}{x^5}\cdot x^4$	$\frac{1}{x}$	
	$\left(\frac{1}{x}\right)^4\cdot(-2x)^5$	$\frac{1}{x^4}\cdot x^5$	x	
7. člen	$\left(\frac{1}{x}\right)^3\cdot(-2x)^6$	$\frac{1}{x^3}\cdot x^6$	$\boxed{x^3}$	7. člen
	$\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot(-2x)^7$	$\frac{1}{x^2}\cdot x^7$	x^5	
	$\left(\frac{1}{x}\right)^1\cdot(-2x)^8$	$\frac{1}{x}\cdot x^8$	x^7	
	$\left(\frac{1}{x}\right)^0\cdot(-2x)^9$	$\frac{1}{x^0}\cdot x^9$	x^9	

---

(17) V rozvoji $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$ určete šestý člen v pořadí.

$\binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$ ... v našem případě $n=12$, $k=6$

$$\binom{12}{6-1} \cdot x^{12-6+1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{6-1} = \binom{12}{5} x^7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 792 \cdot x^7 \cdot \frac{1}{x^5} = \boxed{792\,x^2}$$

---

(18) Který člen rozvoje je $\left(\frac{1}{x}+2x^2\right)^9$ je prostý?

$\binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^9 \cdot (2x^2)^0$ ... $\frac{1}{x^9}$

$\binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^8 \cdot (2x^2)^1$ .... $\frac{1}{x^8} \cdot 2x^2$

$\binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^7 \cdot (2x^2)^2$ ... $\frac{1}{x^7} \cdot 4x^4$

$\binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^6 \cdot (2x^2)^3$ ... $\frac{1}{x^6} \cdot 8x^6$... tento člen neobsahuje proměnnou, je prostý, jeho hodnota je $\binom{9}{3} \cdot 8 = 84$. Prostý člen je <u>čtvrtý v pořadí.</u>

KONEC ČLÁNKU 2.4