Rozlišujeme posloupnosti: a) aritmetickou,

b) geometrickou,

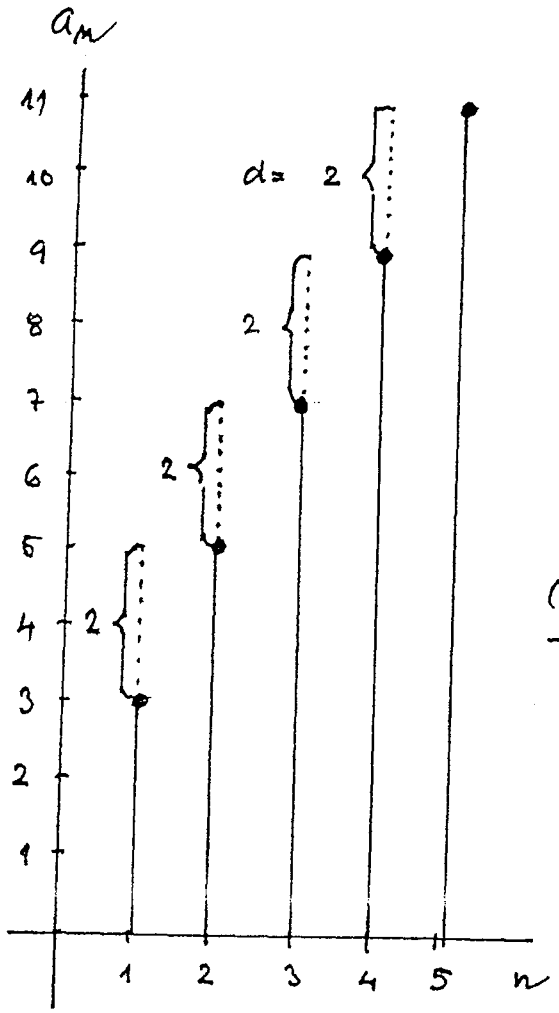
c) ostatní.

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Příklad 1: Posloupnost je vyjádřena rekurentně: $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2$. Napište prvních pět členů a proveďte graf.

$a_1 = 3$	$a_2 = a_1 + 2$	$a_3 = a_2 + 2$	$a_4 = a_3 + 2$	$a_5 = a_4 + 2$
	$a_2 = 3 + 2$	$a_3 = 5 + 2$	$a_4 = 7 + 2$	$a_5 = 9 + 2$
	$a_2 = 5$	$a_3 = 7$	$a_4 = 9$	$a_5 = 11$

Výsledek: 3, 5, 7, 9, 11



Definice: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, právě když existuje takové reálné číslo $\underline{d}$, že pro každé přirozené číslo $\underline{n}$ je

$$a_{n+1} = a_n + d .$$

Číslo $\underline{d}$ se nazývá diference aritmetické posloupnosti.

Věta 1: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro každé $n \in N$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d} \quad \text{VZOREC } \boxed{1}$$

Pro hodnotu a_5 v příkladu 18 platí:

$a_5 = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_5 = 3 + (5-1) \cdot 2$

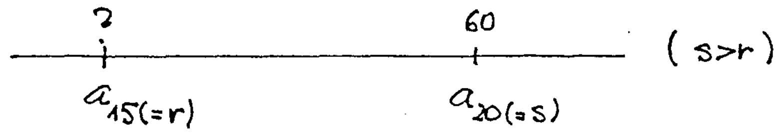
$a_5 = 11$

Věta 2: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro $\forall r,s \in N$:

$$\boxed{a_s = a_r + (s-r)\cdot d} \qquad \text{VZOREC } \boxed{2}$$

Příklad 2: Dáno v arit. posl.: $a_{20}=60$, $d=10$. Určete a_{15}.

Řešení:



1) Pomocí vzorce $\boxed{2}$ $a_s = a_r + (s-r)\cdot d$

$a_{20} = a_{15} + (20-15)\cdot d$

$60 = a_{15} + 50$

$\boxed{a_{15} = 10}$

2) nebo úvahou:

$a_{20} = a_{15} + 5d$

$60 = a_{15} + 50$

$\boxed{a_{15} = 10}$

Příklad 3: Vypočítejte 28. člen aritmetické posloupnosti, ve které je $a_1 = 5$, $d=3$.

Řešení: Protože je dáno a_1 a d, tak použijeme vzorce $\boxed{1}$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, kde $n = 28$, $a_1 = 5$, $d = 3$

$a_{28} = 5 + (28-1)\cdot 3 = 5 + 27\cdot 3 = 5 + 81 = 86$; $\boxed{a_{28} = 86}$

Příklad 4: Vypočítejte 7. a 10. člen aritmetické posloupnosti, je-li

a) $a_1 = 4$, $d = 3$ b) $a_1 = 7$, $d = -3$ c) $a_1 = -2$, $d = -2$

Řešení pomocí vzorce $\boxed{1}$:

a) $a_1 = 4$, $d = 3$ … $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$a_7 = 4 + (7-1)\cdot 3$

$a_7 = 4 + 6\cdot 3$

$a_7 = 4 + 18$

$\boxed{a_7 = 22}$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$a_{10} = 4 + (10-1)\cdot 3$

$a_{10} = 4 + 9\cdot 3$

$a_{10} = 4 + 27$

$\boxed{a_{10} = 31}$

b) $a_1 = 7,\ d = -3$: $a_n = a_1 + (n-1).d$ — $a_7 = 7 + (7-1).(-3)$ — $a_7 = 7 + 6.(-3)$ — $\boxed{a_7 = -11}$

$a_n = a_1 + (n-1).d$ — $a_{10} = 7 + (10-1).(-3)$ — $a_{10} = 7 + 9.(-3)$ — $\boxed{a_{10} = -20}$

c) $a_1 = -2,\ d = -2$: $a_n = a_1 + (n-1).d$ — $a_7 = -2 + (7-1).(-2)$ — $a_7 = -2 + 6.(-2)$ — $\boxed{a_7 = -14}$

$a_n = a_1 + (n-1).d$ — $a_{10} = -2 + (10-1).(-2)$ — $a_{10} = -2 + 9.(-2)$ — $\boxed{a_{10} = -20}$

Příklad 5: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_3 = 5$, $a_8 = 15$. Určete d, a_1, a_{17}.

Řešení: 1) Pomocí vzorce $\boxed{2}$ vypočítáme d.

$$a_s = a_r + (s-r).d$$
$$a_8 = a_3 + (8-3).d$$
$$15 = 5 + 5d$$
$$5d = 10 \quad |:5$$
$$\boxed{d = 2}$$

2) Pomocí vzorce $\boxed{1}$ vypočítáme a_1.

$a_n = a_1 + (n-1).d$, kde $n = 3$, $a_3 = 5$

$$a_3 = a_1 + (3-1).d$$
$$5 = a_1 + 2.2$$
$$5 = a_1 + 4 \quad \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

3) Pomocí vzorce $\boxed{1}$ určíme a_{17}.

$$a_n = a_1 + (n-1).d$$
$$a_{17} = 1 + (17-1).2 = 1 + 16.2 = 1 + 32 = 33 \quad ; \boxed{a_{17} = 33}$$

Příklad 6: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_4 = 2{,}5$, $a_9 = 0$. Určete d, a_1, a_{12}.

Řešení: 1) $a_9 = a_4 + 5d$ — $0 = 2{,}5 + 5d$ — $\boxed{d = -0{,}5}$

2) $a_n = a_1 + (n-1).d$ — $a_4 = a_1 + (4-1).(-0{,}5)$ — $2{,}5 = a_1 - 1{,}5$ — $\boxed{a_1 = 4}$

z a_4, a_9 se volí to, které má menší n, tedy $a_n = a_4$.

3) $a_n = a_1 + (n-1).d$

$a_{12} = 4 + (12-1).(-0{,}5)$

$a_{12} = 4 + 11.(-0{,}5)$ → $a_{12} = 4 - 5{,}5$

$\boxed{a_{12} = -1{,}5}$

Příklad 7: Vypište prvních pět členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_3 = 8$, $d = -3$ b) $a_8 = -12$, $a_9 = -16$

c) $a_1 = 4$, $a_{10} = 58$ d) $a_6 = 17$, $a_{11} = -3$

Řešení: a) $a_3 = 8, d = -3$. Jde o posloupnost klesající, úlohu je možné řešit bez vzorce

$a_2 = 8+3$ $a_1 = 11+3$ $a_4 = 8-3$ $a_5 = 5-3$

$a_2 = 11$ $a_1 = 14$ $a_4 = 5$ $a_5 = 2$

Výsledek: 14, 11, 8, 5, 2

Podle definice na str. 1:

$a_3 = a_2 + d$ $a_2 = a_1 + d$ $a_4 = a_3 + d$

$8 = a_2 - 3$ $11 = a_1 - 3$ $a_4 = 8 - 3$

$a_2 = 11$ $a_1 = 14$ $a_4 = 5$ atd

---

b) $a_8 = -12$, $a_9 = -16$, což jsou hodnoty dvou členů posloupnosti, které po sobě následují; z nich určíme diferenci d.

1) $d = a_9 - a_8$

$d = -16 - (-12)$

$\boxed{d = -4}$

2) Pomocí vzorce $\boxed{1}$ určíme a_1.

$a_n = a_1 + (n-1).d$; dosazujeme-li $a_n = -12$, pak $n = 8$

$\underset{a_8}{-12} = a_1 + (8-1).(-4)$

$-12 = a_1 + 7.(-4)$

$-12 = a_1 - 28$

$\boxed{a_1 = 16}$

→ $\boxed{a_1 = 16}$

$a_2 = 16-4 = 12$, $a_3 = 12-4 = 8$

$a_4 = 8-4 = 4$, $a_5 = 4-4 = 0$

3) $a_2 = 16-4 = 12$, $a_3 = 12-4 = 8$, $a_4 = 8-4 = 4$, $a_5 = 4-4 = 0$

Výsledek: 16, 12, 8, 4, 0.

c) $a_1 = 4$, $a_{10} = 58 \Rightarrow n = 10$ $a_n = a_1 + (n-1).d$

$58 = 4 + (10-1).d$ → $58 = 4 + 9d$

$\boxed{d = 6}$

$a_1 = 4$, $a_2 = 4+6 = 10$, $a_3 = 10+6 = 16$, $a_4 = 16+6 = 22$, $a_5 = 22+6 = 28$

Výsledek: 4, 10, 16, 22, 28.

d) $a_6 = 17$, $a_{11} = -3$

$$a_{11} = a_6 + 5d$$
$$-3 = 17 + 5d$$
$$\boxed{d = -4}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot(-4)$$
$$17 = a_1 + 5\cdot(-4)$$
$$\boxed{a_1 = 37}$$

Výsledek zapiš: 37, 33, 29, 25, 21

Příklad 8: Určete a_1 a d aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_1 + a_6 = 39$
$a_{10} - a_4 = 18$

b) $a_4 + a_9 = 4$
$a_{12} + a_5 = -1,6$

Řešení a):

$$a_1 + a_6 = 39$$
$$a_1 + a_1 + 5d = 39$$
$$\boxed{2a_1 = 39 - 5d} \; ①$$

$$a_{10} - a_4 = 18$$
$$a_1 + 9d - (a_1 + 3d) = 18$$
$$\cancel{a_1} + 9d - \cancel{a_1} - 3d = 18$$
$$6d = 18$$
$$\boxed{d = 3} \; ② \text{ dosaď do } ①$$

$$2a_1 = 39 - 5\cdot 3$$
$$\boxed{a_1 = 12}$$

Řešení b):

$$a_4 + a_9 = 4$$
$$a_1 + 3d + a_1 + 8d = 4$$
$$2a_1 + 11d = 4$$
$$\boxed{2a_1 = 4 - 11d}$$

$$a_{12} + a_5 = -1,6$$
$$a_1 + 11d + a_1 + 4d = -1,6$$
$$2a_1 + 15d = -1,6$$
$$\boxed{2a_1 = -1,6 - 15d}$$

Z rovnosti levých stran rovnic vyplývá i rovnost jejich pravých stran, proto

$$4 - 11d = -1,6 - 15d$$
$$4a = -5,6$$
$$\boxed{d = -1,4}$$

$$2a_1 = -1,6 - 15\cdot(-1,4)$$
$$2a_1 = 19,4$$
$$\boxed{a_1 = 9,7}$$

Příklad 9: Napište prvních pět členů aritmetické posloupnosti, ve které je $a_1 + a_4 = 1$, $a_2 - a_6 = -8$.

Řešení: $a_1 + a_4 = 1$

$a_1 + a_1 + 3d = 1$

$\boxed{2a_1 = 1 - 3d}$

$2a_1 = 1 - 3.2$

$\boxed{a_1 = -2{,}5}$

$a_2 - a_6 = -8$

$a_1 + d - (a_1 + 5d) = -8$

$\cancel{a_1} + d - \cancel{a_1} - 5d = -8$

$-4d = -8$

dosaď $\boxed{d = 2}$

Výsledek: $-2{,}5;\ -0{,}5;\ 1{,}5;\ 3{,}5;\ 5{,}5$

Pro součet S_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ platí

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$ VZOREC $\boxed{3}$

Příklad 10: Vypočítejte součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je-li

a) $a_1 = -3,\ d = 3$ b) $a_1 = 5,\ a_2 = 2$ c) $a_n = 2n - 2$

Řešení: a) $a_1 = -3,\ d = 3 \dots a_n = a_1 + (n-1).d$

$a_{10} = -3 + (10-1).3$

$a_{10} = -3 + 9.3$

$a_{10} = 24$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_{10} = \frac{10}{2}(-3 + 24)$

$S_{10} = 5.21$

$\boxed{S_{10} = 105}$

---

b) $a_1 = 5,\ a_2 = 2$ … nejdříve určíme d, pak a_{10}, poté S_n.

$d = a_2 - a_1$

$d = 2 - 5$

$d = -3$

$a_n = a_1 + (n-1).d$

$a_{10} = 5 + (10-1).(-3)$

$a_{10} = 5 + 9.(-3)$

$a_{10} = -22$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_{10} = \frac{10}{2}(5 - 22)$

$S_{10} = 5.(-17)$

$\boxed{S_{10} = -85}$

---

c) $\underbrace{a_n = 2n - 2}$ … $a_1 = 2.1 - 2$

je vzorec pro n-tý člen $a_1 = 0$

$a_{10} = 2.10 - 2$

$a_{10} = 18$

$S_{10} = \frac{10}{2}(0 + 18)$

$\boxed{S_{10} = 90}$

Příklad 10: Vypočítejte součet všech dvojciferných čísel dělitelných čtyřmi.

Řešení: První dvojciferné číslo dělitelné čtyřmi je 12 $(a_1=12)$

Poslední -"- -"- -"- -"- 96 $(a_n=96)$

Diference je 4 (12, 16, 20...)

Hodnotu $\boxed{n}$ určíme pomocí vzorce $a_n = a_1 + (n-1).d$

$96 = 12 + (n-1).4$

$96 = 12 + 4n - 4$

$4n = 96 - 12 + 4$

$4n = 88 \quad |:4$

$n = 22$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

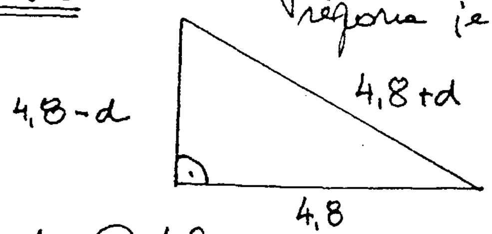
$S_{22} = \frac{22}{2}(12+96)$

$S_{22} = 11 \cdot 108$

$\boxed{S_{22} = 1188}$

Příklad 11: Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti. Délka delší odvěsny je 4,8 dm. Vypočítejte délky zbývajících stran trojúhelníku.

Řešení:



Přepona je nejdelší strana △. Prostřední strana má velikost 4,8, zbývající odvěsna je o d kratší a přepona o d delší.

Podle Pythagorovy věty platí: $4{,}8^2 + (4{,}8-d)^2 = (4{,}8+d)^2$

$4{,}8^2 + \cancel{4{,}8^2} - 9{,}6d + \cancel{d^2} = \cancel{4{,}8^2} + 9{,}6d + \cancel{d^2}$

$4{,}8^2 = 19{,}2d$

$19{,}2d = 23{,}04$

$d = 1{,}2$

Kratší odvěsna má délku $4{,}8 - 1{,}2 = \boxed{3{,}6 \text{ dm}}$

Přepona " " $4{,}8 + 1{,}2 = \boxed{6 \text{ dm}}$

Zkouška $3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 36$, $6^2 = 36$

Příklad 12: V aritmetické posloupnosti je dáno $a_1=2$, $a_n=18$, $S_n=330$. Vypočítejte d, n.

Řešení:

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$330 = \frac{n}{2}(2+18)$

$330 = \frac{n}{2}\cdot 20$

$\boxed{n=33}$

$a_n = a_1+(n-1)\cdot d$

$18 = 2+(n-1)\cdot d$

$18 = 2+(33-1)\cdot d$

$32d = 16$

$\boxed{d=0{,}5}$

Příklad 13: V aritmetické posloupnosti je dáno

a) $a_1=3$; $d=-0{,}5$; $S_n=0$; vypočítejte n, a_n;

b) $n=14$; $a_n=140$; $S_n=1050$; -"- a_1, d.

Řešení a)

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$0 = \frac{n}{2}(3+a_n) \quad |\cdot 2$

$0 = n(3+a_n) \quad |:n$

$0 = 3+a_n$

$\boxed{a_n=-3}$

$a_n = a_1+(n-1)\cdot d$

$-3 = 3+(n-1)\cdot(-0{,}5)$

$-6 = -0{,}5n+0{,}5$

$-6{,}5 = -0{,}5n$

$\boxed{n=13}$

Řešení b)

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$1050 = \frac{14}{2}(a_1+140)$

$1050 = 7\cdot(a_1+140) \quad |:7$

$150 = a_1+140$

$\boxed{a_1=10}$

$a_n = a_1+(n-1)\cdot d$

$140 = 10+(14-1)\cdot d$

$130 = 13d$

$\boxed{d=10}$

Příklad 14: Dáno $a_4=-6$, $S_8=-30$. Určit d. $\Rightarrow n=8$

Řešení:

$a_4 = a_1+3d$

$-6 = a_1+3d$

$a_1 = -3d-6$

$a_8 = a_4+4d$

$a_8 = -6+4d$

$S_8 = \frac{n}{2}(a_1+a_8)$

$-30 = 4(\underbrace{-3d-6}_{a_1}\underbrace{-6+4d}_{a_8})$

$-30 = 4(-12+d$

⋮

$-30=-48+4d$

$4d=18$

$\boxed{d=4{,}5}$

Příklad 15: Dáno: $d=1$, $S_n=90$, $a_1=2$. Určit a_n, n.

Řešení: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ $\wedge$ $\underbrace{a_n=a_1+(n-1).d}_{\text{dosadit do } S_n}$

$S_n=\frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1).d]$

$90=\frac{n}{2}[2+2+(n-1).1]$

$90=\frac{n}{2}(4+n-1)\quad |.2$

$180=\frac{n}{\cancel{2}}(3+n)$

$n^2+3n-180=0$

$n^2+3n-180=0$

$n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+720}}{2}$

$n_{1,2}=\frac{-3\pm 27}{2}=$ $n_1=12$, $n_2=\cancel{-15}$

$\boxed{n=12}$

$a_{12}=a_1+(12-1).d$

$a_{12}=2+11.1$

$\boxed{a_{12}=13}$

Příklad 16: $S_n=1224$, $a_1=40$, $d=4$. Určete n.

Řešení: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ $\wedge$ $a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n=40+(n-1).4$

$a_n=40+4n-4$

$\boxed{a_n=36+4n}$

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+36+4n)$

$1224=\frac{n}{2}(40+36+4n).2$

$2448=n(76+4n)$

$2448=76n+4n^2$

$4n^2+76n-2448=0\quad |:4$

$n^2+19n-612=0$

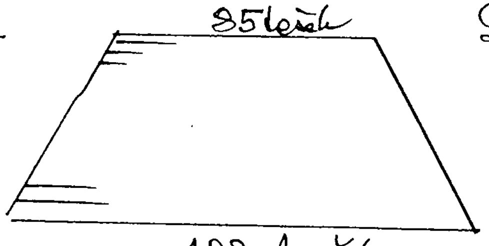
$n_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{19^2+2448}}{2}=\frac{-19\pm 53}{2}=$ $n_1=17$, $\cancel{n_2=-36}$

Řešení: $\boxed{n=17}$

UŽITÍ ARITMETICKÝCH POSLOUPNOSTÍ

Příklad 17: Střechu tvaru lichoběžníka je třeba pokrýt taškami. Do horní řady se vejde 85 tašek, do spodní řady 102 tašek. V každé následující řadě je o 1 tašku více než v předcházející. Kolik tašek je třeba na pokrytí střechy?

Řešení:



Známe: $a_1 = 85$

$a_n = 102$

$d = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$102 = 85 + (n-1)\cdot 1$

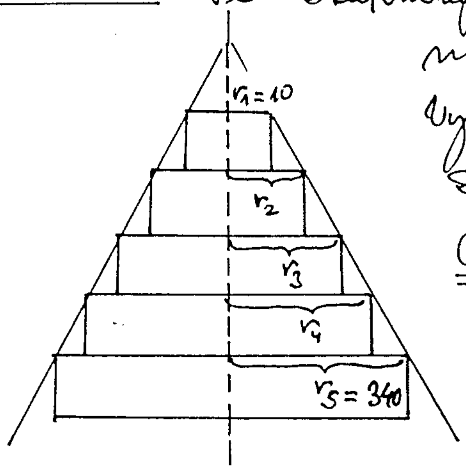
$\boxed{n = 18}$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_{18} = \frac{18}{2}(85+102)$

$\boxed{S_{18} = 1685 \text{ (tašek)}}$

Příklad 18: Pětistupňový kotouč pro převody rychlosti má krajní poloměry 100 mm a 340 mm. Vypočtěte poloměry zbývajících tří stupňů (jejich tloušťky se rovnají).



Řešení: Označme obvod horního kotouče a_1, dolního-pátého a_5. Platí:

1) $a_1 = 2\pi r_1$
$a_1 = 2\pi\, 100$
$\boxed{a_1 = 200\pi}$

2) $a_5 = 2\pi \cdot r_5$
$a_5 = 2\pi \cdot 340$
$\boxed{a_5 = 680\pi}$

3) Pro d platí: $a_s = a_r + (s-r)d$
$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d$
$680\pi = 200\pi + 4d$
$\boxed{d = 120\pi}$

4) $a_2 = a_1 + d \quad \wedge \quad a_2 = 2\pi r_2$

$a_2 = 200\pi + 120\pi \qquad a_2 = a_2$

$a_2 = 320\pi \qquad 2\pi r_2 = 320\pi \quad |:2\pi$

$\boxed{r_2 = 160 \text{ (mm)}}$

5) $a_3 = a_2 + d$

$a_3 = 320\pi + 120\pi$

$a_3 = 440\pi$

$a_3 = 2\pi r_3$

$440\pi = 2\pi r_3 \quad |:2$

$\boxed{r_3 = 220\,(mm)}$

6) $a_4 = a_3 + d$

$a_4 = 440\pi + 120\pi$

$a_4 = 560\pi$

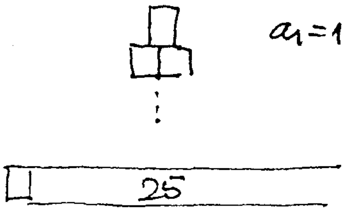
$a_4 = 2\pi r_4$

$560\pi = 2\pi r_4$

$\boxed{r_4 = 280\,(mm)}$

Příklad 19: Konzervy v plechovkách byly uspořádány do tvaru „rovnoramenného Δ". V dolní vrstvě bylo 25 plechovek, v horní 1 plechovka. V každé následující vyšší řadě je o 1 plechovku více než v předcházející. Kolik plechovek bylo celkem třeba?

Řešení:



$a_1 = 1$, $d = 1$

$a_n = 25$

1) Určíme n:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$25 = 1 + (n-1)\cdot 1$

$\boxed{n = 25}$

2) $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{25}{2}(1+25) = 325$

$\boxed{S_n = 325 \text{ plechovek}}$

VLASTNOSTI ARITMETICKÝCH POSLOUPNOSTÍ

Aritmetická posloupnost s diferencí d je rostoucí pro $d>0$, klesající pro $d<0$. Dále platí:

a) Je-li $d>0$, pak je zdola omezená, ale shora nikoli.

b) Je-li $d<0$, pak je shora omezená, ale zdola nikoli.

c) Je-li $d=0$, pak je omezená shora i zdola týmž číslem.

Příklad 20: Rozhodněte, zda aritm. posloupnost

a) $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$ b) $(-4n+3)_{n=1}^{\infty}$ c) $(5)_{n=1}^{\infty}$

je rostoucí, nebo klesající, nebo ani rostoucí ani klesající.

Řešení: Posloupnost je rostoucí, právě když

$\forall n \in N$ platí: $a_{n+1} > a_n \quad = a_{n+1} - a_n > 0$

a) $a_n = 2n-1$, $a_{n+1} = 2(n+1)-1 = 2n+2-1 = 2n+1$

$a_{n+1} - a_n = 2n+1 - (2n-1) = 2n+1-2n+1 = 2$, $d=2$, $d>0$

$\Rightarrow$ Posloupnost je rostoucí.

b) $a_n = -4n+3$, $a_{n+1} = -4(n+1)+3 = -4n-4+3 = -4n-1$

$a_{n+1} - a_n = -4n-1-(-4n+3) = \cancel{-4n}-1\cancel{+4n}-3 = -4$

$d=-4$, $d<0 \Rightarrow$ posloupnost je klesající.

c) $a_n = 5$, $a_{n+1} = 5$, $a_{n+1} - a_n = 5-5 = 0$, $d=0 \Rightarrow$ posloupnost není ani rostoucí ani klesající.

Příklad 21: Určete všechna $a \in R$, pro která aritmetická posloupnost $(an+3)_{n=1}^{\infty}$
a) je rostoucí, b) je klesající, c) není ani rostoucí ani klesající.

Řešení:

a) Má-li být rostoucí, musí platit: $a_{n+1} > a_n$

$a_n = an+3$, $a_{n+1} = a(n+1)+3 = an+a+3$

$an+a+3 > an+3$

Pro $\boxed{a>0}$ je posloupnost rostoucí.

b) Má-li být klesající, musí platit $a_{n+1} < a_n$

$an+a+3 < an+3$

Pro $\boxed{a<0}$ je posloupnost klesající.

c) Ani rostoucí ani klesající je pro $a=0$, pak $a_n = 3$.

Příklad 22: Číslo 55 rozložte na součet takových čísel, aby každé následující bylo o 4 větší než předcházející a poslední bylo 19. Která jsou to čísla a kolik jich je?

Řešení: $S_n=55$, $a_n=19$, $d=4$

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \wedge a_n=a_1+(n-1)\cdot d$

$55=\frac{n}{2}(a_1+19)$ | $19=a_1+(n-1)\cdot d$

$\leftarrow a_1=19-(n-1)\cdot 4$

$55=\frac{n}{2}[19-(n-1)\cdot 4+19] \quad |\cdot 2$

$110=n[19-4n+4+19]$

$110=n(42-4n)$

$110=42n-4n^2 \quad |:(-2)$

$\rightarrow 2n^2-21n+55=0$

$n_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{1}}{4}$

$n_{1,2}=\frac{21\pm1}{4}=$ $n_1=5$, $\underbrace{n_2=5{,}5}$

nevyhovuje, neboť $n\in Z^+$

$a_1=19-(5-1)\cdot 4=3$; $a_1=3$

3, 7, 11, 15, 19

Zkouška: $S_n=\frac{5}{2}(3+19)=\frac{5}{2}\cdot 22=55$

Jsou to čísla 3, 7, 11, 15, 19 a je jich 5.