9a) **GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST**

Příklad 1: Posloupnost je vyjádřena rekurentně: $a_1=0{,}5$, $a_{n+1}=2\cdot a_n$. Napište prvních pět členů této posloupnosti a proveďte graf.

Řešení: $a_1=0{,}5$

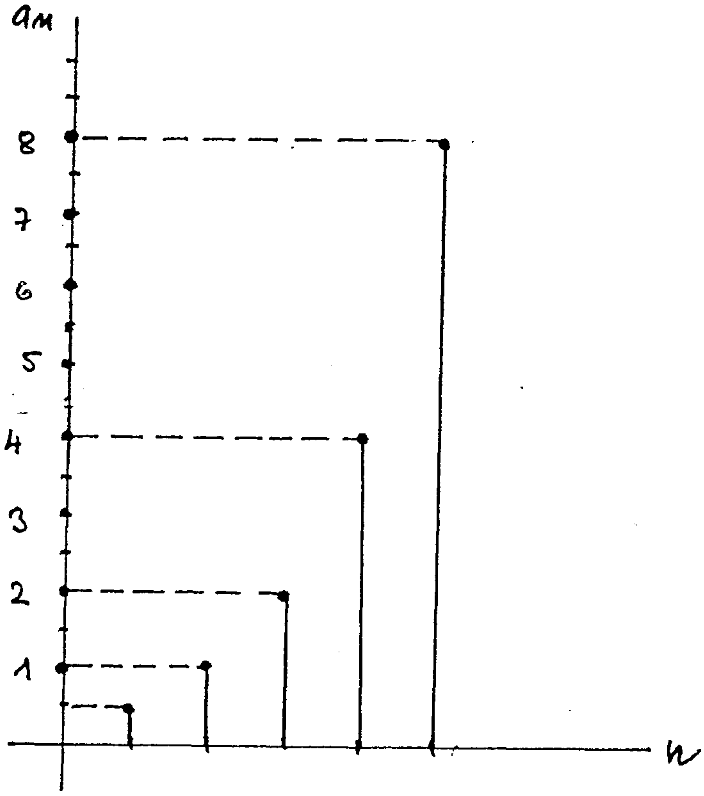
$a_2=2\cdot a_1=2\cdot 0{,}5=1$

$a_3=2\cdot a_2=2\cdot 1=2$

$a_4=2\cdot a_3=2\cdot 2=4$

$a_5=2\cdot a_4=2\cdot 4=8$

$0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8$



Definice

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je $a_{n+1}=a_n\cdot q$.
Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

$\Rightarrow a_1\neq 0,\ q\neq 0 \qquad q=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Věta: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé $n\in N$

$$\boxed{a_n=a_1\cdot q^{n-1}}$$ VZOREC $\boxed{1}$

Příklad 2: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1=6$, $a_2=24$. Určete q, a_5, a_8

$q=\dfrac{a_2}{a_1}$

$q=\dfrac{24}{6}$

$\boxed{q=4}$

$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$a_5=a_1\cdot q^{5-1}$

$a_5=6\cdot 4^4$

$\boxed{a_5=1536}$

$a_8=a_1\cdot q^{8-1}$

$a_8=6\cdot 4^7$

$\boxed{a_8=98304}$

Příklad 3: Vypočítejte 12. člen geometrické posloupnosti, ve které je $a_1 = 3{,}2$, $q = 0{,}5$.

Řešení:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{12} = 3{,}2 \cdot 0{,}5^{12-1}$

$a_{12} = 3{,}2 \cdot 0{,}5^{11}$

$a_{12} = 0{,}001\,5625$

$\boxed{a_{12} = \frac{1}{640}}$

NEBO $a_{12} = \frac{32}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{32}{10} \cdot \frac{1^{11}}{2^{11}} = \frac{32}{10 \cdot 2^{11}} = \frac{2^5}{2 \cdot 5 \cdot 2^{11}} = \frac{2^5}{2^{12} \cdot 5} = \frac{1}{2^7 \cdot 5} = \frac{1}{640}$

Příklad 4: Vypište prvních šest členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí; nakreslete graf u př. →

a) $a_1 = 0{,}2$; $q = 2$

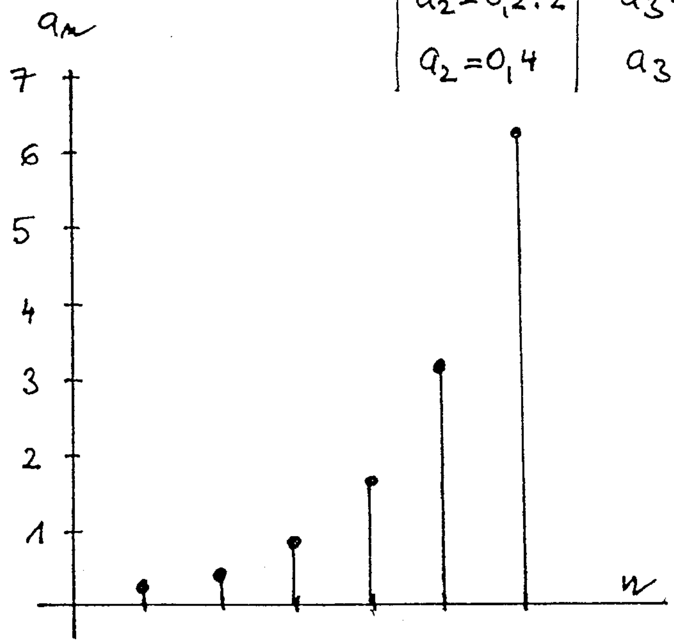
b) $a_1 = -10$, $q = 0{,}5$

c) $a_1 = -3{,}5$; $q = 1$

d) $a_1 = -3{,}5$; $q = -1$

Řešení: a) $a_1 = 0{,}2$; $q = 2$

$a_1 = 0{,}2$;	$a_2 = a_1 \cdot q$	$a_3 = a_2 \cdot q$	$a_4 = a_3 \cdot q$	
	$a_2 = 0{,}2 \cdot 2$	$a_3 = 0{,}4 \cdot 2$	$a_4 = 0{,}8 \cdot 2$	
	$a_2 = 0{,}4$	$a_3 = 0{,}8$	$a_4 = 1{,}6$	$a_5 = 3{,}2$; $a_6 = 6{,}4$



Výsledek: 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4

b) $a_1 = -10$, $q = 0{,}5$ ... $-10; -5; -2{,}5; -1{,}25; -0{,}625; -0{,}3125$

c) $-3{,}5; -3{,}5; -3{,}5; -3{,}5; -3{,}5; -3{,}5$

d) $-3{,}5; +3{,}5; -3{,}5; +3{,}5; -3{,}5; +3{,}5$

Příklad 5: Zdůvodněte, že jsou následující posloupnosti geometrické.

a) $(3^{2n})_{n=1}^{\infty}$ b) $(2^3)_{n=1}^{\infty}$ c) $(2^n \cdot 3^{2-n})_{n=1}^{\infty}$

Zdůvodnění: Základní myšlenka: Jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bude reálné číslo, pak jsou tyto posloupnosti geometrické.

a) $a_n = 3^{2n}$, $a_{n+1} = 3^{2(n+1)} = 3^{2n+2} = 3^{2n} \cdot 3^2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{3^{2n}} \cdot 3^2}{\cancel{3^{2n}}} = 3^2 = 9$$, čili $q = 9$, posloupnost je geometrická, neboť $9 \in R$.

---

b) $a_n = 2^3$, $a_{n+1} = 2^3$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^3}{2^3} = 1$; $q = 1$, $1 \in R \Rightarrow$ posl. je geom.

---

c) $a_n = (2^n \cdot 3^{2-n})$ $a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \underbrace{3^2 : 3^{n+1}} = 2^n \cdot 2^1 \cdot 3^2 : 3^{n+1} =$

$a_n = 2^n \cdot 3^2 : 3^n$ $= 2^n \cdot 2 \cdot \frac{9}{3^{n+1}} = 2^n 2 \frac{9}{3^n \cdot 3} =$

$a_n = \frac{2^n \cdot 3^2}{3^n}$ $= \frac{18 \cdot 2^n}{3 \cdot 3^n} = \boxed{\frac{6 \cdot 2^n}{3^n}}$

$\boxed{a_n = \frac{9 \cdot 2^n}{3^n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{6 \cdot 2^n}{3^n}}{\frac{9 \cdot 2^n}{3^n}} = \frac{6 \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{3^n}}{9 \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{3^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad q = \frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3} \in R$$

Daná posloupnost je geometrická.

Příklad 6: Zjistěte, zda posloupnost $\left(\frac{2n-1}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, nebo geometrická.

Úvaha: Bude-li aritmetická, tak $a_{n+1} - a_n$ bude reálné číslo.
—"— geometrická, tak to už víme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bude reálné číslo.

1) Je aritmetická? $a_n = \boxed{\frac{2n-1}{3}}$; $a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3} = \frac{2n+2-1}{3} = \boxed{\frac{2n+1}{3}}$

ano $d = \frac{2}{3}$.

Příklad 7: V geometrické posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány její členy $b_1=2$, $b_6=-486$. Určete: q, b_2, b_3, b_4, b_5.

Řešení: provedeme pomocí

Věty: V geom. posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí

$$\forall r,s \in N \quad \boxed{a_s = a_r \cdot q^{s-r}} \quad \text{VZOREC } \boxed{2}$$

$$\underbrace{a_r}_{r=1} = b_1 \qquad \underbrace{a_s}_{s=6} = b_6$$

1. způsob určení q

$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ ... upravíme

$b_s = b_r \cdot q^{s-r}$

$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1}$

$-486 = 2 \cdot q^5 \quad |:2$

$q^5 = -243$

$\boxed{q=-3}$

$b_1 = 2$ (je dáno)

$b_2 = 2 \cdot (-3)$

$\boxed{b_2=-6}$

$b_3 = -6 \cdot (-3)$

$\boxed{b_3 = 18}$

$b_4 = 18 \cdot (-3)$

$\boxed{b_4 = -54}$

$b_5 = -54 \cdot (-3)$

$\boxed{b_5 = 162}$

---

2. způsob určení q: podle další věty vyjádřené vzorcem

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \quad \text{VZOREC } \boxed{3}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ upravíme

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1}$

$-486 = 2 \cdot q^{6-1}$

$-486 = 2 \cdot q^5$

$q^5 = -243$

$q = -3$

Další postup jako nahoře.

Příklad 8: Určete 1. člen a kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_1 + a_2 = 4$, $a_4 - a_2 = 24$

b) $a_1 + a_4 = 4$, $a_3 + a_2 = -4$

c) $a_1 + a_3 = 2$, $a_2 + a_4 = 2$

d) $a_2 + a_3 = 0$, $a_1 + a_3 = 2$

Řešení a)

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 4 \\ a_4 - a_2 &= 24 \end{aligned}\right\}$$ a_2, a_4 vyjádříme pomocí vzorce 3

$a_2 = a_1 q^1$, $a_4 = a_1 \cdot q^3$, dosadíme do rovnic

$a_1 + a_2 = 4$

$a_1 + a_1 q = 4$

$a_1(1+q) = 4$

$$\boxed{a_1 = \frac{4}{1+q}}$$

$a_4 - a_2 = 24$

$a_1 q^3 - a_1 q = 24$

$a_1(q^3 - q) = 24$

$$\boxed{a_1 = \frac{24}{q^3+q}}$$

$a_1 = a_1$

$$\frac{4}{q+1} = \frac{24}{q^3-q} \quad \Big| \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{q+1} = \frac{6}{q^3-q}$$

$q^3 - q = 6(q+1)$

$q\cancel{(q+1)} \cdot (q-1) = 6\cancel{(q+1)}$

$$\boxed{q^2 - q - 6 = 0}$$

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} q_1 = 3 \\ q_2 = -2 \end{cases}$$

Je-li $q_1 = 3$ pak $a_1 = \frac{4}{1+3} \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

1. možnost

Je-li $q_2 = -2$, pak $a_1 = \frac{4}{1-2} = \frac{4}{-1} \rightarrow \boxed{a_1 = -4}$

Výsledek: jsou 2 možnosti:

$$\boxed{a_1 = 1,\ q = 3 \quad ,\ a_1 = -4,\ q = -2}$$

Řešení b)

$a_1 + a_4 = 14$ (1)

$a_3 + a_2 = -4$ (2)

a_2, a_3, a_4 vyjádříme pomocí a_1, q.

$a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, $a_4 = a_1 \cdot q^3$

(1) $a_1 + a_1 \cdot q^3 = 14$

$a_1(1 + q^3) = 14$

$$\boxed{a_1 = \frac{14}{1+q^3}}$$

$a_1 = a_1$

(2) $a_1 q^2 + a_1 q = -4$

$a_1(q^2 + q) = -4$

$$\boxed{a_1 = -\frac{4}{q^2+q}}$$

$$\frac{14}{1+q^3} = -\frac{4}{q^2+q}$$

$$14(q^2+q) = -4\underbrace{(1^3+q^3)}$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)\cdot(A^2 - AB + B^2) \quad (5)$$

$14q\,\cancel{(q+1)} = -4\,\cancel{(q+1)}\cdot(1-q+q^2)$

$14q = -4+4q-4q^2$

$4q^2+10q+4=0 \quad |:2$

$2q^2+5q+2=0$

$q_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-5\pm 3}{4} \rightarrow$

$q_1=-2\ ,\ q_2=-\frac{1}{2}$

Pro $q_1=-2$ je $a_1 = \frac{14}{1+(-2)^3} = \frac{14}{1-8} = \frac{14}{-7} = -2$ $\boxed{a_1=-2}$

Pro $q_2=-\frac{1}{2}$ je $a_1 = \frac{14}{(-\frac{1}{2})^3+1} = \frac{14}{-\frac{1}{8}+1} = 16$ $\boxed{a_1=16}$

Dvě řešení : $\boxed{a_1=-2,\ q=-2\ ,\ a_1=16,\ q=-\frac{1}{2}}$

Řešení c)

$a_1+a_3=2$ | $a_2+a_4=2$

$a_1+a_1\cdot q^2=2$ | $a_1q+a_1q^3=2$

$a_1(1+q)^2=2$ | $a_1(q+q^3)=2$

$a_1=\frac{2}{1+q^2}$ | $a_1=\frac{2}{q^3+q}$

$\Downarrow$

$\frac{2}{q^2+1} = \frac{2}{q\cdot(q^2+1)} \quad \Big|\cdot \frac{q^2+1}{2}$

$\frac{1}{1} = \frac{1}{q}$

$\boxed{q=1}$

$\rightarrow a_1=\frac{2}{1+1^2}=\frac{2}{2}$

$\boxed{a_1=1}$

$\boxed{\text{Jedno řešení}: a_1=1,\ q=1}$

Řešení d)

$a_2+a_3=0$

$\underline{a_1+a_3=2}$

$a_2+a_3=0$

$a_1q+a_1q^2=0$

$a_1(q+q^2)=0$

$a_1\cdot q\,(1+q)=0$

$\rightarrow$ Tento součin se rovná 0, jedině když

$a_1=0 \ \vee\ q=0\ \vee\ q=-1$

Vyšetřeme všechny tři případy.

1) Je-li $a_1=0$, pak $a_1+a_3=2$

$a_1+a_1\cdot q^2=2$

$0+0=2$

$0=2$

$\rightarrow$ To není možné, proto když $a_1=0$, tak nemá úloha řešení.

2) Je-li $q=0$, pak od a_2 jsou všechny další členy rovny a_1.

$\boxed{\text{1. řešení: } a_1=2,\ q=0}$

3) Je-li $q=-1$, pak

$a_1+a_3=2$

$a_1+a_1\cdot q^2=2$

$a_1+a_1\cdot(-1)^2=2$

$2a_1=2$

$\boxed{a_1=2}$

Ověříme, zda $a_1=2$ vyhovuje také 1. rovnici:

$L = a_2+a_3 = a_1 q + a_1\cdot q^2 = a_1\cdot(-1)+a_1(-1)^2 =$

$= -a_1+a_1=0$

$P=0$

$L=P$

$\boxed{\text{2. řešení: } a_1=1,\ q=-1}$

Příklad 9: Určete a_{10} geometrické posloupnosti, ve které

a) $a_1=2,\ q=\sqrt[3]{2}$

Řešení:

$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$a_{10}=2\cdot(\sqrt[3]{2})^9=2\,(2^{\frac{1}{3}})^9=$

$=2\cdot 2^{\frac{9}{3}}=2\cdot 2^3=\boxed{16}$

b) $a_1=1,\ q=\sqrt[3]{3}$

Řešení:

$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

$a_{10}=1\cdot(\sqrt[3]{3})^9=(3^{\frac{1}{3}})^9=3^{\frac{9}{3}}=3^3$

$=\boxed{27}$

Příklad 10: Která z posloupností je aritmetická a která geometrická? Své tvrzení zdůvodněte.

a) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2,\ n\in N$

b) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n\cdot 2$

c) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{n}$

d) $\left(\frac{5+4n}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$

Zdůvodnění:

a) $a_1=2,\ \underbrace{a_{n+1}=a_n+2}$

$a_{n+1}-a_n=2=d \Rightarrow$ posloupnost je aritmetická $(d\in R)$

---

b) $a_{n+1}=a_n\cdot 2$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2=q \Rightarrow$ posloupnost je geometrická $(q\in R)$

---

c) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{n}$

Je aritmetická?

$a_1=2$, $a_2=a_1\cdot\frac{1}{1}$	$a_3=a_2\cdot\frac{1}{2}$	$a_4=a_3\cdot\frac{1}{3}$	$a_5=a_4\cdot\frac{1}{4}$
$a_2=2.1$	$a_3=2\cdot\frac{1}{2}$	$a_4=1\cdot\frac{1}{3}$	$a_5=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$
$a_2=2$	$a_3=1$	$a_4=\frac{1}{3}$	$a_5=\frac{1}{12}$

$2, 2, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ rozdíl mezi každými dvěma po sobě následujícími členy posloupnosti není stejný $\Rightarrow$ posl. není aritmetická.

Je geometrická?

$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{n}$ $\rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\boxed{\frac{1}{n}}$ Toto číslo není konstantní, mění se v závislosti na hodnotě n $\Rightarrow$ není ani geometrická

---

d) $\left(\frac{5+4n}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\Rightarrow$ $a_n=\frac{5+4n}{3}$, $a_{n+1}=\frac{5+4(n+1)}{3}=\frac{5+4n+4}{3}=$

$=\frac{4n+9}{3}$

$d=a_{n+1}-a_n=\frac{4n+9}{3}-\frac{5+4n}{3}=\frac{\cancel{4n}+9-5-\cancel{4n}}{3}=\frac{4}{3}$

$d=\frac{4}{3}$, $d\in R$ $\Rightarrow$ posloupnost je aritmetická.

Příklad 11: Čísla 12 a $-\frac{4}{81}$ jsou druhým a sedmým členem geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

a) Vypočítejte a_1 a q.

Řešení: $a_2=12$, $a_7=-\frac{4}{81}$

$a_s=a_r\cdot q^{s-r}$

$a_7=a_2\cdot q^{7-2}$

$-\frac{4}{81}=12\cdot q^5$

$q^5=-\frac{1}{243}$

$\boxed{q=-\frac{1}{3}}$

$a_2=a_1\cdot q$

$a_1=\frac{a_2}{q}$

$a_1=\frac{12}{-\frac{1}{3}}$

$\boxed{a_1=-36}$

b) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zapište rekurentním vztahem.

Řešení: Víme, že $a_1=-36$, $q=-\frac{1}{3}$. Proto každý následující člen získám z předcházejícího tak, že ho vynásobím $q=-\frac{1}{3}$, čili $a_{n+1}=a_n\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}a_n$

$\boxed{a_1=-36,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n}$

c) Zapište posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vzorcem pro n-tý člen.

$a_2 = -\frac{1}{3}a_1$, $a_3 = -\frac{1}{3}a_2$, $a_4 = -\frac{1}{3}a_3$ $\boxed{a_n = -\frac{1}{3}a_{n-1}}$

Příklad 12: Dokažte, že čísla $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ jsou první tři členy určité geometrické posloupnosti.

Důkaz: $a_1 = \sqrt{5}-\sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{3}$, $a_3 = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2}).(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{5-2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

$$q_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2}).\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

$$q_1 = q_2 = q$$

Příklad 13: Je dána geom. posloupnost $a_n = 4^n$

a) Napište prvních 5 členů

b) Ověřte, že $a_3 = \sqrt{a_2 . a_4}$, $a_4 = \sqrt{a_3 . a_5}$ (to je tzv. geometrický ø)

a) 4, 16, 64, 256, 1024

b) $a_3 = \sqrt{a_2 . a_4} = \sqrt{16 . 256} = 64$

$a_4 = \sqrt{a_3 . a_5} = \sqrt{64 . 1024} = 256$

To plyne ze vztahu $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

$$a_2^2 = a_1 . a_3$$

$$a_2 = \sqrt{a_1 . a_3}$$

Věta: Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí

$\boxed{S_n = n a_1}$ pro $q=1$ $\qquad$ $\boxed{S_n = a_1 \dfrac{q^n-1}{q-1}}$ pro $q \neq 1$

Příklad: Určete součet prvních 12 členů geom. posloupnosti, je-li $a_1 = 3$, $q=2$.

Řešení: $q \neq 0$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 3 \cdot \frac{2^{12}-1}{2-1} = 3 \cdot \frac{4096-1}{1} = 3 \cdot 4095$$

$$= \boxed{12\,285}$$

Příklad: V geometrické posloupnosti je $a_1 = 2$, $q = 3$, $S_n = 80$. Určete n.

Řešení: $q \neq 0 \wedge q \neq 1$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$80 = \cancel{2} \cdot \frac{3^n-1}{\cancel{3-1}}$$

je exponenciální rovnice

$$80 = 3^n - 1$$

$$3^n = 81$$

$$3^n = 3^4$$

$$\boxed{n=4}$$

Příklad: Najděte a_{10} a součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je-li $a_1 = -2$, $a_2 = 4$.

Řešení: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{-2} = -2$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$$

$$a_{10} = -2 \cdot (-2)^9$$

$$a_{10} = (-2)^{10}$$

$$a_{10} = 1024$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$S_{10} = -2 \cdot \frac{(-2)^{10}-1}{-2-1}$$

$$\boxed{S_{10} = 682}$$

Příklad: Určete S_{10} posl. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je-li: $a_1 - a_3 = -1{,}5$ (1)

$a_2 + a_1 = 1{,}5$ (2)

Řešení: na další stránce.

$2 \text{ ①} \quad a_1 - a_1 q^2 = -1{,}5 \qquad\qquad 2 \text{ ②} \quad a_1 q + a_1 = 1{,}5$

$a_1(1-q^2) = -1{,}5 \qquad\qquad a_1(q+1) = 1{,}5$

$\boxed{a_1} = -\dfrac{1{,}5}{1-q^2} \qquad = \qquad \boxed{a_1} = \underbrace{\dfrac{1{,}5}{1+q}}_{③}$

$$-\frac{1{,}5}{1-q^2} = \frac{1{,}5}{1+q}$$

$$-\frac{1{,}5}{(1+q)\cdot(1-q)} = \frac{1{,}5}{(1+q)} \quad \Big/ \cdot \frac{1+q}{1{,}5}$$

$$-\frac{1}{1-q} = 1$$

$$1-q = -1$$

$$\boxed{q = 2}$$

$q = 2$ dosadíme do ③

$$a_1 = \frac{1{,}5}{1+2} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

$$\boxed{a_1 = 0{,}5}$$

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$S_{10} = 0{,}5 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1}$$

$$\boxed{S_{10} = 511{,}5}$$

---

2 **Příklad**: Vypočítejte součet prvních 10 členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je-li $a_1 = -8$, $q = 1$.

Řešení: Protože $q = 1$, tak použijeme vzorec

$$S_n = n \cdot a_1$$

$$S_{10} = 10 \cdot (-8) \rightarrow \boxed{S_{10} = -80}$$

UŽITÍ GEOM. POSLOUPNOSTÍ

Příklad: O kvádru s rozměry a m, b m, c m platí:

1. a, b, c jsou přirozená čísla.
2. a, b, c tvoří po sobě následující členy geom. posloupnosti.
3. Součet délek všech hran kvádru je 56 m.
4. Objem kvádru je 64 m³.

Vypočítejte délky hran kvádru.

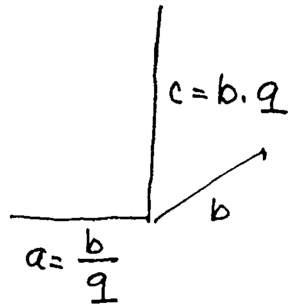
Řešení: Každá hrana téže délky se vyskytuje u kvádru 4krát. Proto:

$4(a+b+c)=56$

$4\left(\frac{b}{q}+b+b\cdot q\right)=56 \quad | :4$

$\frac{b}{q}+b+bq=14$

$b\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=14 \quad \boxed{1}$



$\underline{b}$ určíme ze vztahu

$a\cdot b\cdot c=64$

$\frac{b}{q}\cdot b\cdot b\cdot q=64$

$\frac{b^3 \cancel{q}}{\cancel{q}}=64$

$b=\sqrt[3]{64}$

$\boxed{b=4}$ dosaď do $\boxed{1}$

$4\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=14$

$\frac{1}{q}+1+q=3{,}5 \quad |\cdot q$

$1+q+q^2-3{,}5q=0$

$q^2-2{,}5q+1=0$

$q_{1,2}=\frac{2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2-4}}{2}=\frac{2{,}5\pm\sqrt{2{,}25}}{2}=\frac{2{,}5\pm 1{,}5}{2}=$ $\boxed{q_1=2}$, $\boxed{q_2=\frac{1}{2}}$

Je-li $q=2$, pak $a=\frac{4}{2}=2$, $b=4$, $c=4.2=8$

Je-li $q=\frac{1}{2}$, pak $a=8$, $b=4$, $c=2$ stejné

Kvádr má hrany dlouhé 2cm, 4cm a 8cm.

__Příklad:__ Střadatel uloží na termínovaný vklad na 1 měsíc částku 50 000 Kč. Roční úroková míra je 8,75%. Jaká částka mu bude po uplynutí 1 měsíce vyplacena?

__Řešení:__ Úrok se zdaňuje ve prospěch státu 15%; 100%−15%=85%

Bez vzorce: Nutno vypočítat $\frac{1}{12}$ (1 měsíc = $\frac{1}{12}$ roku) z částky, tj. zdaněného úroku a vzniklou částku přičíst k 50 000 Kč

$\frac{1}{12}\cdot\underbrace{0{,}85}\cdot\underbrace{0{,}0875}\cdot 50000+50\,000=50\,309{,}90\,(\text{Kč})\doteq 50\,310\,(\text{Kč})$

$8{,}75\%=\frac{8{,}75}{100}=0{,}0875$

$100\%-15\%=85\%=\frac{85}{100}=0{,}85$

__Bude vyplacena částka__

__50 310 Kč.__

---

b) Pomocí vzorce $\boxed{I_n = I_0 \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{p}{100}\right)^n}$, kde

I_n ... úspory na konci roku n-tého úrokovacího období

$p\%$ ... úroková míra, I_0 ... počáteční vklad.

Řešení: $\frac{1}{12}$ úrokové míry ... $p:12 = 8{,}75:12 = \frac{35}{48}\,\%$

$n = 1$ (měsíční období)

$$I_n = 50000\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{\frac{35}{48}}{100}\right)^1 = 50\,000\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{7}{960}\right) =$$

$\doteq \boxed{50\,310\ (\text{Kč})}$

Příklad:

Vkladatel uloží na počátku roku na termínovaný vklad na 2 roky částku 32 000 Kč. Roční úroková míra je 9,5%. Jak vysokou částku bude mít na konci 2. roku, jestliže si v průběhu celé doby nevybírá úroky a je-li úrokovací období

a) 1 rok b) $\frac{1}{2}$ roku c) $\frac{1}{4}$ roku d) 1 měsíc.

Řešení a): $I_n = I_0 \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{p}{100}\right)^n$, kde $n = 2$

$I_n = 32000\left(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}095\right)^2 = \boxed{37\,376{,}70\ (\text{Kč})}$

Řešení b): $I_n = 32000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{9{,}5}{100} \cdot \frac{1}{2}\right)^4$ $\quad n = 2 : \frac{1}{2} = 4$

$I_n = 37\,489{,}50$ Kč

Řešení c): $I_n = 32000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{9{,}5}{100} \cdot \frac{1}{4}\right)^8$ $\quad n = 2 : \frac{1}{4} = 8$

$I_n = 37\,548{,}30$ Kč

Řešení d) $I_n = 32000 \cdot \left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{9{,}5}{100} \cdot \frac{1}{12}\right)^{24}$ $\quad n = 2 : \frac{1}{12}$

$I_n \doteq 37\,588{,}40$ Kč.

Příklad 21: Pan Novák si 31.5.2000 uložil na spořicí účet částku 3800 Kč s roční úrokovou mírou 2,5%. Dne 18.11. téhož roku si tento vklad i s úrokem sníženým o 15% daní vybral. Kolik korun pan Novák celkem dostal?

Řešení: každý měsíc včetně února se považuje za 30denní a každý rok za 360denní. Den, kdy byl vklad uložen, se do úrokovací doby počítá a den, kdy je vklad vybrán, se do této doby nepočítá. Tedy:

$I_0 = 3\,800$ Kč

doba: $1 + 5\cdot 30 + 17 = 168$, $p = 2{,}5$

$$I = I_0 + \left(1 + 0{,}85\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{168}{360}\right) = 3800 + \left(1 + 0{,}85\cdot\frac{2{,}5}{100}\cdot\frac{7}{15}\right) = \boxed{3837{,}70\ (\text{Kč})}$$

Příklad 22: Občan si na konci roku 1993 založil osobní konto s dvouletou výpovědní lhůtou a s roční úrokovou mírou 10,5% se čtvrtletním úrokovacím obdobím. Na konto ihned uložil 5000 Kč a stejnou částku pak pravidelně ukládal koncem každého čtvrtletí. Z konta nic nevybral ani úroky. Jak vysoká částka byla na kontě na konci roku 1995?

Řešení: pomocí vzorce:

$$\boxed{S(I_n) = I_0\,\frac{\left(1 + 0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1} - 1}{0{,}85\cdot\frac{p}{100}}}$$

Uplynou 2 roky = 8 čtvrtletních období, $n = 8$

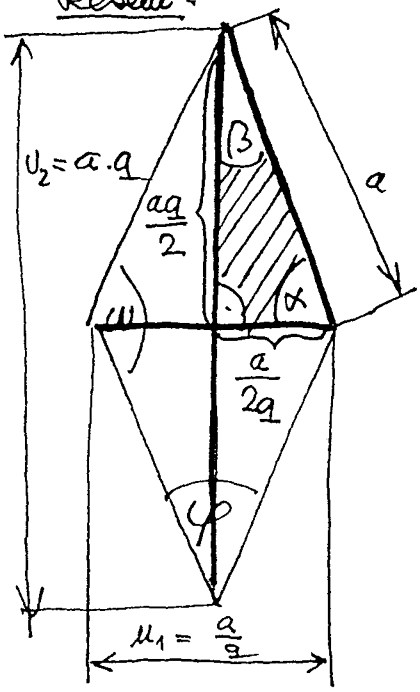
Roční $p = 10{,}5\%$, tj. $\frac{10{,}5}{100}$

Čtvrtletní $p = \frac{1}{4}$ z $\frac{10{,}5}{100} = 0{,}25\cdot\frac{10{,}5}{100}$

$$S(I_n) = 5000\cdot\frac{\left(1 + 0{,}85\cdot\frac{10{,}5}{100}\cdot 0{,}25\right)^{8+1} - 1}{0{,}85\cdot\frac{10{,}5}{100}\cdot 0{,}25} = \boxed{49\,232{,}50\ (\text{Kč})}$$

Příklad 23: Kratší úhlopříčka, strana a delší úhlopříčka kosočtverce mají délky, které tvoří 3 po sobě jdoucí členy geom. posloupnosti. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů.

Řešení:



$$\frac{u_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{q} = \frac{a}{2q} \qquad \frac{v_2}{2} = \frac{1}{2}aq = \frac{aq}{2}$$

$$\left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{aq}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4q^2} + \frac{a^2q^2}{4} = a^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{4q^2} + \frac{q^2}{4} = 1 \quad \Big| \cdot 4q^2$$

$$1 + q^4 = 4q^2$$

$$q^4 - 4q^2 + 1 = 0$$

Subst. $q^2 = y$

$$y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$q^2 = 2$$

$$q = \pm\sqrt{2}$$

$$q = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2\sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2$$

$$\Rightarrow \alpha \doteq 63°26'$$

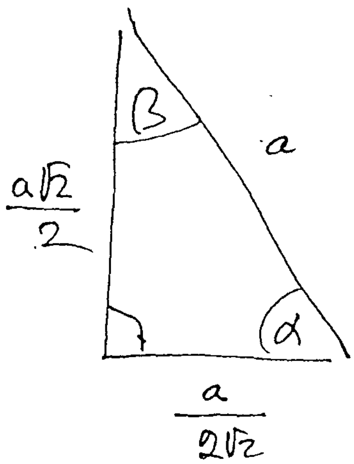
$$2\alpha = 126°52'$$

$$\boxed{\omega = 126°52'}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2}$$

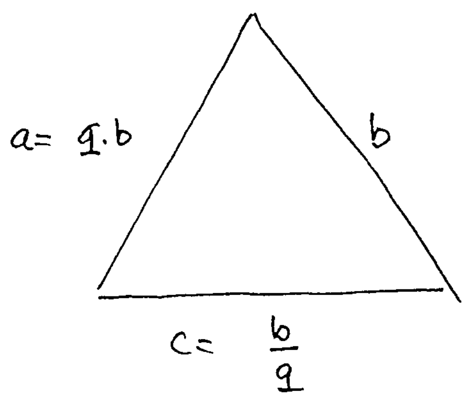
$$\Rightarrow \beta \doteq 26°34'$$

$$\boxed{\varphi = 2\beta \doteq 53°8'}$$



Příklad 24: Délky stran △ tvoří po sobě jdoucí členy geom. posloupnosti. Jak jsou velké, je-li jeho obvod 13,24 m a strana b = 4,4 m?

Řešení:



$$b + qb + \frac{b}{q} = 13{,}24$$
$$4{,}4 + 4{,}4q + \frac{4{,}4}{q} = 13{,}24$$
$$4{,}4q + \frac{4{,}4}{q} - 8{,}84 = 0 \quad |\cdot q$$
$$4{,}4q^2 + 4{,}4 - 8{,}84q = 0$$
$$4{,}4q^2 - 8{,}84q + 4{,}4 = 0 \quad |:4$$
$$1{,}1q^2 - 2{,}21q + 1{,}1 = 0$$
$$q_{1,2} = \frac{+2{,}21 \pm 0{,}21}{2{,}2} \quad q_1 = 1{,}1, \quad q_2 = \frac{10}{11}$$

$q = 1{,}1$ ... $b = 4{,}4$

$a = 4{,}4 \cdot 1{,}1 = 4{,}84$

$c = \frac{4{,}4}{1{,}1} = 4$ Zk. $4 + 4{,}4 + 4{,}84 = 13{,}24$

$q = \frac{10}{11}$ ... $b = 4{,}4$

$a = 4{,}4 \cdot \frac{10}{11} = 4$

$c = 4{,}4 : \frac{10}{11} = 4{,}84$, je stejné

△ má strany dlouhé $\boxed{4{,}4\text{ m}, 4\text{ m}, 4{,}84\text{ m}}$ a vyhovují △ nerovnosti.

Příklad 25: Podnikatel získal od banky úvěr 400 000 Kč na dobu 6 let s roční úrokovou mírou 13 %. Úvěr bude splácet v 6 stejných splátkách. Kolik korun
a) bude činit jedna splátka,
b) zaplatí podnikatel bance celkem?

Řešení: K = 400 000 Kč, n = 6, p = 13, úrokové období = 1 rok, a_0 = výše splátky po uplynutí každého roku.

$$a_0 = \frac{K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot\frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1} = \frac{400\,000\,(1+0{,}13)^6\cdot 0{,}13}{(1+0{,}13)^6 - 1} = 100\,061{,}30 \text{ (Kč)}$$

100 061,30 Kč · 6 = 600 367,80 (Kč)

a) Jedna splátka je 100 061,30 Kč.

b) Podnikatel zaplatí celkem 600 367,80 Kč.