1 $\int_1^e \ln x \, dx =$ Protože $\int \ln x$ není v základních vzorcích pro integrování, musíme provést úpravu pro metodu per partes.

$\int_1^e 1 \cdot \ln x$ podle $\int u'v = uv - \int uv'$

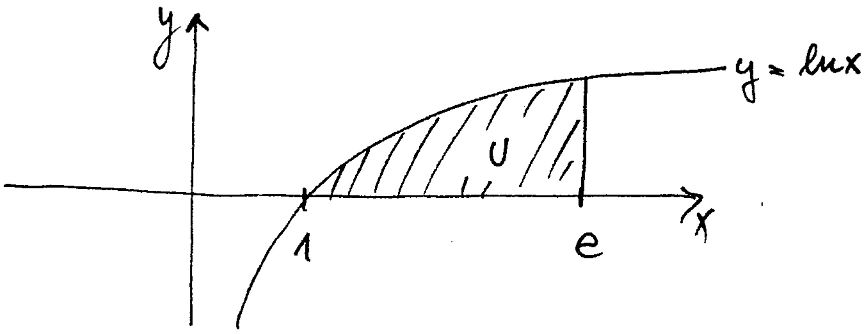
$u' = 1$, $v = \ln x$

$u = x$, $v' = \frac{1}{x}$

$$= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = \underbrace{[x \ln x]_1^e - [x]_1^e}_{\text{to lze spojit}}$$

$$= [x \cdot \ln x - x]_1^e = e \cdot \ln e - e - [1 \cdot \ln 1 - 1] =$$

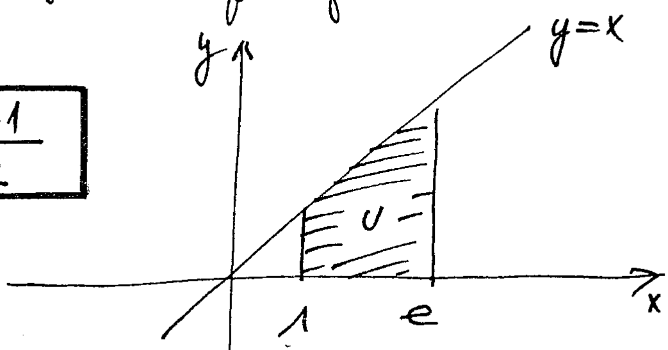
$$= e \cdot 1 - e - [1 \cdot 0 - 1] = e - e + 1 = \boxed{1} \qquad \boxed{S(U) = 1}$$



---

2 $\int_1^e x \, dx =$, $y = x$ je rovnice přímky

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e^2 - 1}{2}}$$



$S(U) = \boxed{\frac{e^2 - 1}{2} \doteq 3{,}2}$ čtverečné jednotky

---

$\boxed{3}$ $$\int_1^e \frac{\ln t}{t} = \int_1^e \ln t \cdot \frac{dt}{t} = -\int_0^1 \underbrace{\ln x}_{} \cdot dx = -\left[x \cdot \ln x - x\right]_0^1$$

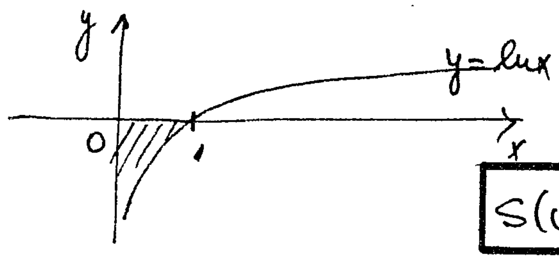
jsme již počítali na str. 1

Subst. $x = \ln t$ | nové meze: $x = \ln 1$ $\quad x = \ln e$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$ | $\boxed{x = 0}$ $\quad \boxed{x = 1}$ nové meze

$dx = \frac{dt}{t}$

Protože v intervalu $(0;1)$ je graf funkce $y = \ln x$ pod osou x, tak musíme před znak $\int_0^1$ dát minus.



$$= -\left[1 \cdot \ln 1 - 1 - 0 \cdot \ln 0 - 0\right] =$$

$$= -(\ln 1 - 1) = -(0 - 1) = +1$$

$$\boxed{S(U) = 1}$$

$\boxed{4}$ $$\int_0^1 \frac{t\,dt}{t^2+1} = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, t\,dt =$$

Subst. $x = t^2+1$ | nové meze:

$dx = 2t\,dt$ | $x = 0^2+1$

$t\,dt = \frac{dx}{2}$ | $\boxed{x = 1}$

$x = 1^2+1$

$\boxed{x = 2}$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln x\right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{2} \ln 2 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$$

$$\boxed{\doteq 0{,}347}$$

$\boxed{5}$ $\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx$

$u = x \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{x}$

~~???~~ můžš jako vzorec $\boxed{\int e^{-x} = e^{-x}}$, ještě jednou to odvodím:

$\int e^{-x}dx$ ... sub. $t = -x$

$dt = -1\,dx$

$dx = -dt$

Integrál podle

$\int_0^\infty uv' = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty u'v$

$= \int e^t\cdot(-dt) = -\int e^t = -e^t = -e^{-x}$,

čili $\boxed{\int e^{-x} = -e^{-x}}$ Používej jako vzorec.

Integrál bez limity, výsledek je stejný, ale musíš dát ~~dole~~ lim (●)

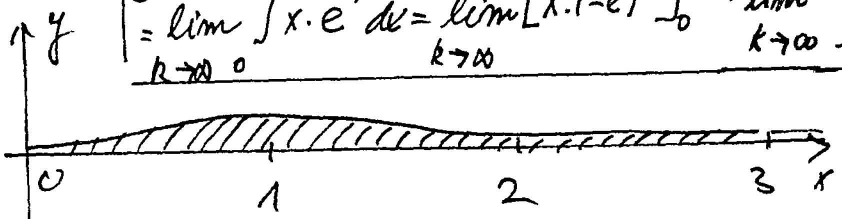
$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx = \left[x\cdot(-e)^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1\cdot(-e^{-x})\,dx = \left[-\frac{x}{e^x}\right]_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty e^{-x}}_{\text{viz vzorec}} =$$

Znaménko − se nevztahuje k exponentu, proto ho lze „vytknout"

$$= \left[-\frac{x}{e^x}\right]_0^\infty + \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = \left[-\frac{x}{e^x}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{e^x}\right]_0^\infty \text{ to lze spojit } =$$

$$= \left[-\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right]_0^\infty = \underbrace{-\frac{\infty}{e^\infty} - \frac{1}{e^\infty}}_{\text{je asi } 0} - \Big(\underbrace{-\frac{0}{e^0}}_{=0} - \frac{1}{e^0}\Big) = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

● $= \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^k x\cdot e^{-x}\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \left[x\cdot(-e)^{-x}\right]_0^k - \lim\limits_{k\to\infty} \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx$ atd.



Vypočítal jsem si hodnoty funkce $y = x\cdot e^{-x}$, $y = \frac{x}{e^x}$ a dospěl jsem k uvedenému grafu, odkud vyvozuji, plochy se blíží k hodnotě 1.

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} t\cdot e^{-t^2}dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2}t\,dt =$ Subst. $x=-t^2$

$dx=-2t\,dt$

$t\,dt = -\frac{dx}{2}$

Nové meze: $x=-0^2$

$x=-0$

$\boxed{x=0}$

$x=-(\infty)^2$ $\boxed{x=-\infty}$

Změna z $+\infty$ na $-\infty$

exponent 2 se k minus nevztahuje

• $\displaystyle = \int_0^{-\infty} e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^x dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^{-\infty} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty}-e^0\right) =$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\infty}}-1\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \boxed{\frac{1}{2}}$

NEBO POMOCÍ LIMITY

• nebo $\displaystyle\lim_{X\to-\infty}\int_0^X e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_0^X e^x dx = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^X$

$= -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty}-e^0\right)$ atd.

7 $\displaystyle\underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx}_{\text{levá str. rovnice}} = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x\,dx$ = řešíme pomocí $\int uv' = uv - \int u'v$

$u = \sin x \qquad v' = \sin x$

$u' = \cos x \qquad v = -\cos x$

Poznámka: Musíme nejdříve určit neurčitý integrál $\int \sin^2 x\,dx$.

$= \sin x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x) = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx =$

$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx = -\sin x \cos + \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx =$

$\underbrace{= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx}_{\text{pravá strana rovnice}}$ (již bez mezí)

$\underbrace{\int \sin^2 x\,dx} = -\sin x \cos x + x - \underbrace{\int \sin^2 x\,dx}$

spojíme

$\int \sin^2 x\,dx + \int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x$

$2 \cdot \int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x \quad | \cdot \frac{1}{2}$

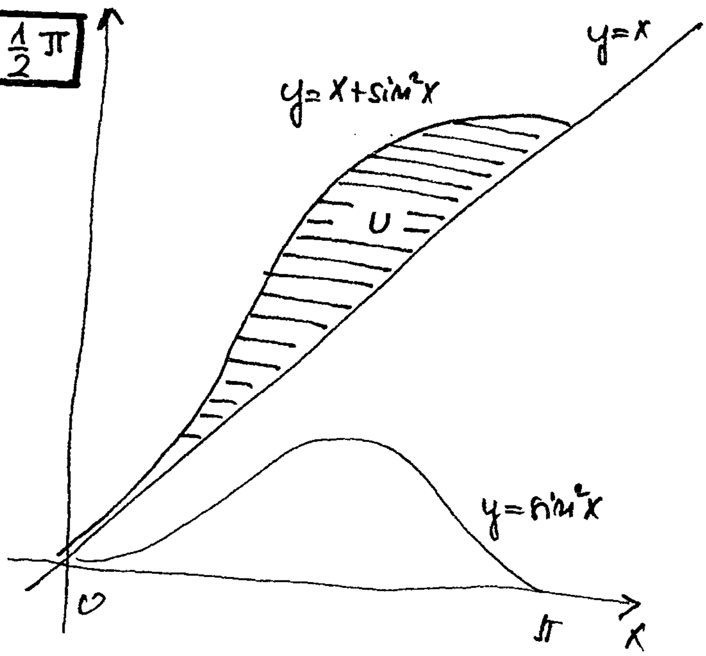
$\int \sin^2 x\,dx = \boxed{\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)}$ to je neurčitý integrál

Dosadíme meze

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\pi - \sin\pi \cdot \cos\pi - (0 - \sin 0 \cdot \cos 0)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\pi - 0 \cdot (-1) - (0 - 0 \cdot 1)\right] = \boxed{\frac{1}{2}\pi}$

$\boxed{S(U) = \frac{\pi}{2}}$



$\boxed{8}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx =$ podle $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} uv' = [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int u'v \, dx$

Je vhodné, aby jeden z proměnných u, u', v, v' měl v hodnotě 1. Pak je snadný výpočet.

$u = x \qquad v' = \sin x$

$u' = 1 \qquad v = -\cos x$

$$= \left[x \cdot (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\cos x)\, dx = \left[-x \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx =$$

$$= \left[-x \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} - 0 \cdot \cos 0\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 \cdot 1\right) + (1 - 0) = \boxed{1}$$

$\boxed{9}$ $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\frac{1}{\cos t}}_{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{\sin t \, dt}_{-dx} =$$

Sub. $x = \cos t$

$dx = -\sin t \, dt$

$-dx = \sin t \, dt$

Nové meze: $x = \cos 0$

$\boxed{x = 1}$

$x = \cos\frac{\pi}{4}$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

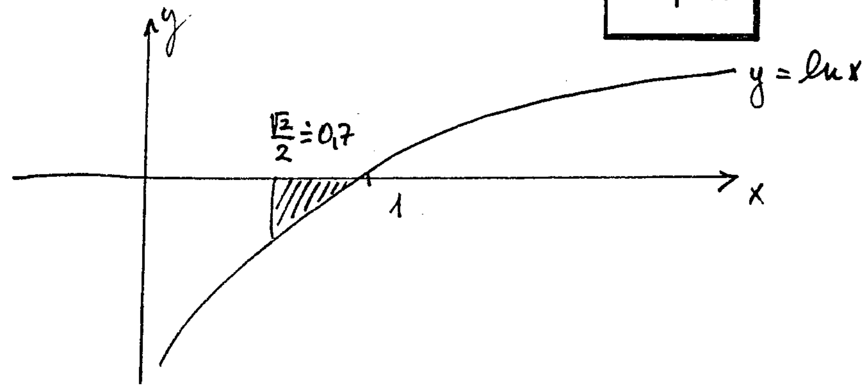
$$= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x}\, dx = \left[-\ln x\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$ obsah útvaru

budu počítat už jen s novou proměnnou a novými hranicemi.

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\ln 1) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 =$$

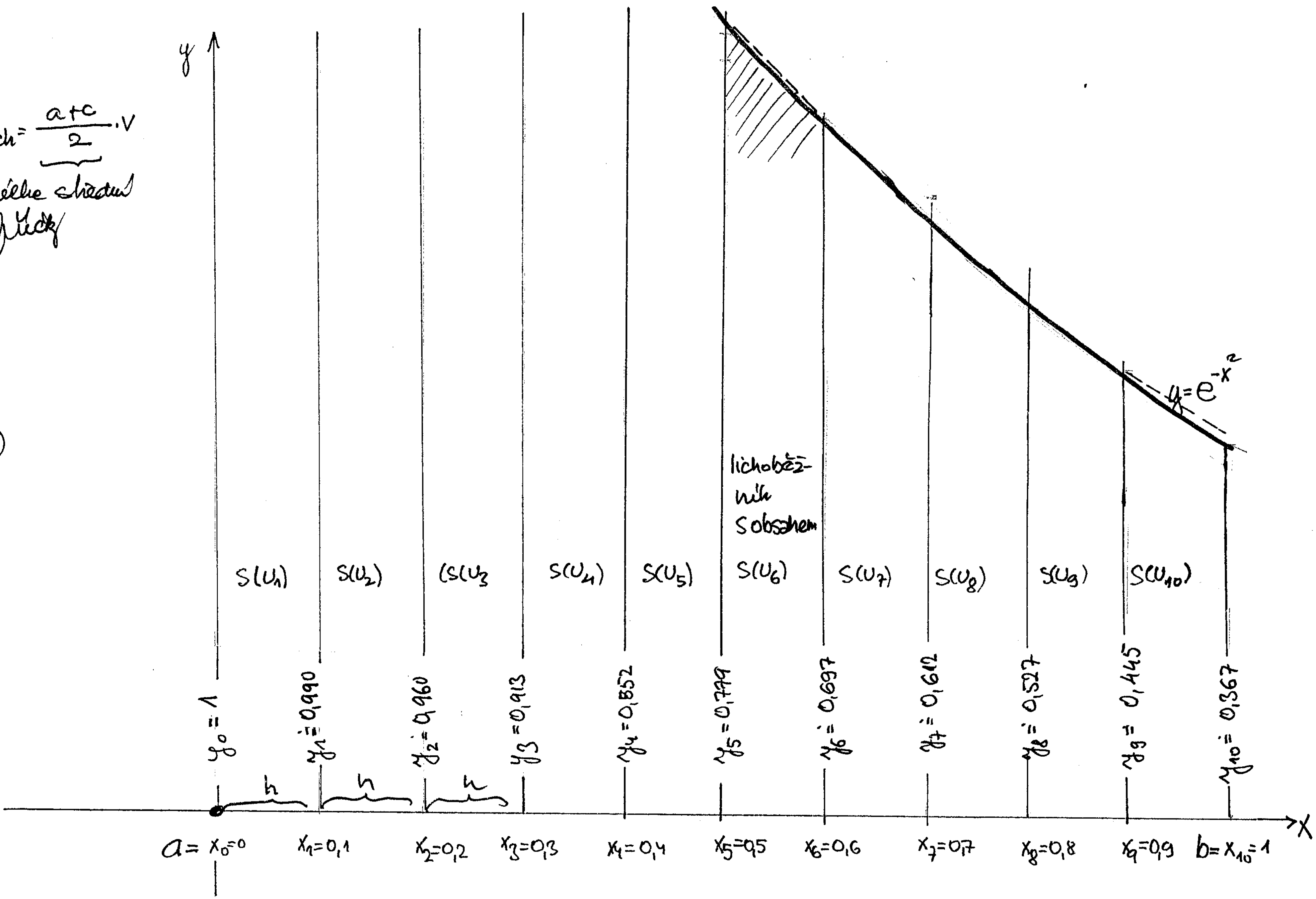
$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \boxed{-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -(-0{,}346\ldots)}$$

$\boxed{= 0{,}346}$



$\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}707$

$S_{lich} = \underbrace{\frac{a+c}{2}}_{\text{délka střední příčky}} \cdot v$



$\boxed{10}$ Lichoběžníková metoda spočívá v tom, že integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ nahradíme integrálním součtem obsahů lichoběžníků (viz obrázek). V našem případě $f(x)=e^{-x^2}$, $n=10$

Platí:

$$\int_0^1 e^{x}dx = S(U_1)+S(U_2)+S(U_3)+S(U_4)+S(U_5)+S(U_6)+S(U_7)+S(U_8)+S(U_9)+S(U_{10})$$

$$h=\frac{b-a}{n} \quad \dots \quad h=\frac{1-0}{10}=0{,}1$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{y_1+y_0}{2}\cdot h+\frac{y_2+y_1}{2}\cdot h+\frac{y_3+y_2}{2}\cdot h+\frac{y_4+y_3}{2}\cdot h+\frac{y_5+y_4}{2}\cdot h+$$

$$+\frac{y_6+y_5}{2}\cdot h+\frac{y_7+y_6}{2}\cdot h+\frac{y_8+y_7}{2}\cdot h+\frac{y_9+y_8}{2}\cdot h+\frac{y_{10}+y_9}{2}\cdot h$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{2}\cdot(y_1+y_0+y_2+y_1+y_3+y_2+y_4+y_3+y_5+y_4+$$

$$+y_6+y_5+y_7+y_6+y_8+y_7+y_9+y_8+y_{10}+y_9$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{h}{2}\left[y_0+2(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9)+y_{10}\right]$$

VZOREC: $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\cdot\left[y_0+2(y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\cdot y_n)+y_n\right]}$$

pro výpočet přibližné hodnoty určitého integrálu v mezích $\underline{a}$, $\underline{b}$, kde interval $\langle a,b\rangle$ si rozdělíme na $\underline{n}$ částí.

Výpočet našeho integrálu (hodnoty – viz graf)

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \doteq \frac{1-0}{10}\left[1+2\cdot(0{,}990+0{,}960+0{,}913+0{,}852+0{,}779+0{,}697+\right.$$

$$\left.+0{,}612+0{,}527+0{,}445)+0{,}367\right] = 1+2\cdot 6{,}775+0{,}367 = 1+13{,}55+$$

$$0{,}367 = \boxed{14{,}917}$$