1. $\int e^{\sin t} \cos t \, dt = \ldots$ substituce: $x = \sin t$

$\boxed{dx} = \boxed{\cos t \, dt} \Rightarrow$

$= \int e^x dx = e^x = \boxed{e^{\sin t}}$

$\cos t \, dt$ nahrazuji v zápise výrazem dx

Jako bych počítal derivaci $\underline{x}$ podle proměnné t.

---

2. $\int \frac{t\,dt}{t^2+1} =$ Substituce: $x = t^2+1$

$dx = 2t\,dt$, protože v čitateli integrovaného výrazu je $t\,dt$, tak z rovnice $dx = 2t\,dt$ vypočtu $t\,dt$, a tedy $t\,dt = \frac{dx}{2}$ a tento výraz dosadím do čitatele.

$= \int \frac{\frac{dx}{2}}{x} =$

$= \int \frac{\frac{dx}{2}}{\frac{x}{1}} = \int \frac{dx}{2x} =$

$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln x = \boxed{\frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C}$

---

3. $\int \operatorname{tg} t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt =$ Sub.: $x = \cos t$

$dx = -\sin t \, dt$

$-dx = \sin t \, dt$

$= \int \frac{\sin t \, dt}{\cos t} = \int \underbrace{\frac{1}{\cos t}}_{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{\sin t \, dt}_{-dx} =$

$= \int \frac{1}{x} \cdot (-dx) = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln x = \boxed{-\ln \cos t}$

$\boxed{4}$ $\int \cos^3 t\, dt = \int \cos^2 t \cdot \cos t\, dt =$ Sub.: $x = \sin t$

$dx = \cos t\, dt$

$= \int (1 - \sin^2 t) \cdot \underbrace{\cos t\, dt}_{dx} =$

Víme, že $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,

$\Rightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ nebo

$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$= \int (1 - x^2)\, dx = x - \frac{x^3}{3} =$

$= \boxed{\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}}$ nebo $\boxed{\frac{3 \sin t - \sin^3 t}{3}}$

$\boxed{5}$ $\int e^{-t^2} t\, dt =$ Substituce: $x = -t^2$

$dx = -2t\, dt$, do integrovaného výrazu potřebuji jen $t\, dt$, proto $t\, dt = -\frac{dx}{2}$

$= \int e^x \cdot \left(-\frac{dx}{2}\right) =$

$= \int e^x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dx =$

$-\frac{1}{2} \int e^x dx = -\frac{1}{2} e^x = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$, což lze dále upravit:

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{t^2}} = \boxed{-\frac{1}{2e^{t^2}}}$

Existuje tzv. vzorec $\boxed{\int e^{-x} = -e^{-x}}$ což jste použili na fakultě.

$\boxed{6}$ $\int \frac{dx}{2x+1} = \int \frac{1}{2x+1} dx =$ Sub. $\underbrace{z = 2x+1}$, $dz = 2\,dx$

to je rovnice přímky, která má směrnici 2, je to tzv. lineární funkce, jejímž grafem je přímka

$= \int \frac{1}{2x+1} \cdot dx = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{2} =$

$= \int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} \cdot dz = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} =$

Z rovnice $dz = 2dx$ vyjádříme dx, které je v int. výrazu

$dx = \frac{dz}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2} \ln z =$

$= \frac{1}{2} \cdot \ln(2x+1) = \frac{\ln(2x+1)}{2}$

Při řešení tohoto typu příkladu lze užít „vzorec"!

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{\ln(2x+1)}{2} = \frac{\text{přiroz. logaritmus rovnice přímky}}{\text{směrnice přímky}}$$

např. $\int \frac{dx}{5x-3} = \boxed{\frac{\ln(5x-3)}{5}}$

---

7 $\int \cos 2x \, dx =$

Sub. $t = 2x$

$dt = 2dx$

$dx = \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} dt$

$= \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt =$

$= \frac{\sin t}{2} = \boxed{\frac{\sin 2x}{2}}$

Platí tedy: $\int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2}$ $\quad \frac{\text{integrále } \cos 2x}{2}$

Obdobně lze psát: $\int \cos 5x \, dx = \boxed{\frac{\sin 5x}{5}}$

Ověření: $t = 5x$

$dt = 5dx$

$dx = \frac{1}{5} dt$

$\int \cos 5x \, dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int \cos t \, dt =$

$= \frac{1}{5} \sin t = \frac{\sin t}{5} = \frac{\sin 5x}{5}$

---

8 $\int \sqrt{1-x} \, dx = \int (1-x)^{\frac{1}{2}} dx =$

Sub. $t = 1-x$

$dt = -1 \, dx$

$dx = -dt$

$= \int t^{\frac{1}{2}} \cdot (-dt) = -\int t^{\frac{1}{2}} dt =$

$- \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} = \boxed{-\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3}}$

Obdobně $\int \sqrt{x} = -\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \boxed{-\frac{2}{3} \sqrt{x^3}}$

Podmínka: Pod $\sqrt{\ }$ nesmí být složená funkce

$\int \sqrt{2+x} = \boxed{-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(2+x)^3}}$

9

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt =$$

Sub. $x=\ln t$

$dx=(\ln t)'dt$

$dx=\frac{1}{t}\,dt$

$$=\int_1^e \underbrace{\ln t}_{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{t}\,dt}_{dx} =$$

Výpočet mezí spojené se zavedením nové proměnné x.

Pro $t=1$ je $x=\ln t$

$x=\ln 1$

$\boxed{x=0}$

Pro $t=e$ je $x=\ln t$

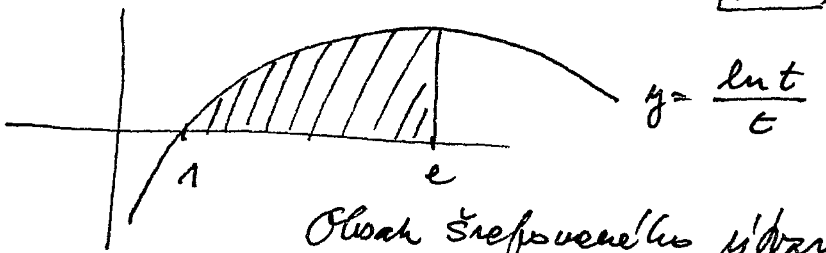
$x=\ln e$

$\boxed{x=1}$

nové meze

$$=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

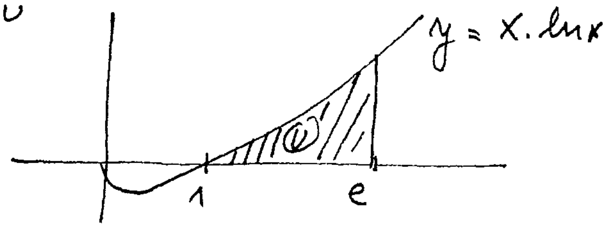
$$=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$



Obsah šrafovaného útvaru je $\frac{1}{2}$.

---

10 Obsah útvaru U



$\int_1^e x\cdot\ln x$ podle

$$\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$$

$$\int_1^e x\cdot\ln x=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx=$$

$u'=x$ $\quad v=\ln x$

$u=\frac{x^2}{2}$ $\quad v'=\frac{1}{x}$

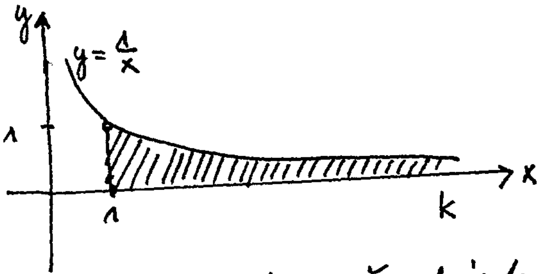
$$=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$=\left[\frac{e^2}{2}\cdot\underbrace{\ln e}_{1}-\frac{1^2}{2}\cdot\ln 1\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right]=$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\doteq 2{,}097\doteq\boxed{2{,}1=S(U)}$$

11 Pomocné příklady na NEVLASTNÍ INTEGRÁL (je na str. 6)

Příklad 1: Určete nevlastní integrál z funkce $y=\frac{1}{x}$ v mezích od 1 do ∞ ($D_f: R-\{0\}$).



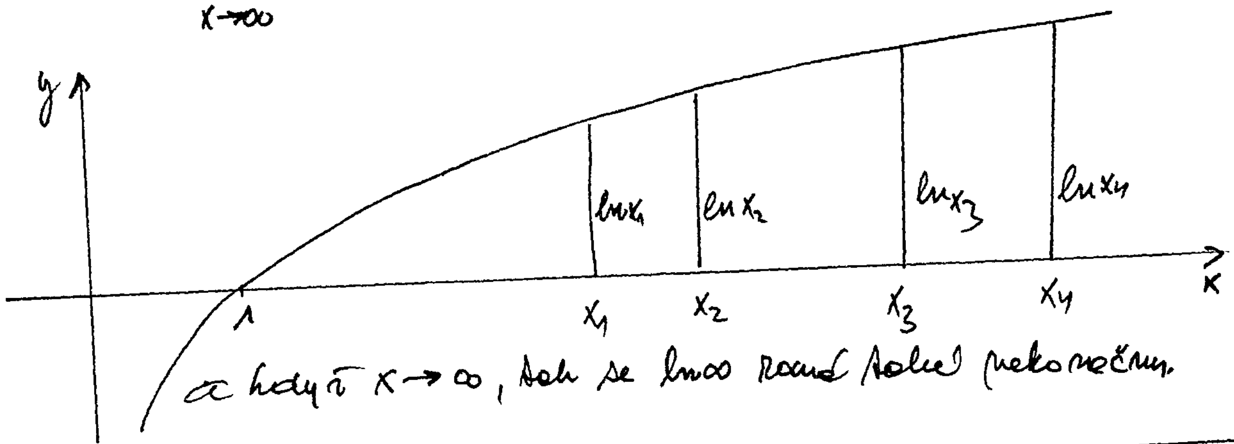
$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_1^{x}\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^{x}=\lim_{x\to\infty}(\ln x-\ln 1)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\ln x-0)=\lim_{x\to\infty}\ln x=\boxed{\infty}$$

Zde se plocha vzniklá integrováním funkcí $y=\frac{1}{x}$ nezužuje příliš rychle $\Rightarrow$. Její velikost je proto nekonečná.

Samotnou $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x$ vyjadřuje následující obrázek:



a když $x\to\infty$, tak se ln x rovná také nekonečnu.

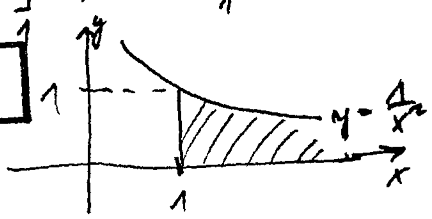
Příklad 2: Určete nevlastní integrál z funkce $y=\frac{1}{x^2}$.

$D_f: (-\infty;0)\cup(0;\infty)$ nebo $D_f: R-\{0\}$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_1^{x}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_1^{x}x^{-2}\,dx=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x^{-1}}{1}\right]_1^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1\cdot x^{-1}}{1}\right]_1^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot x^{1}}\right]_1^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{x}=$$

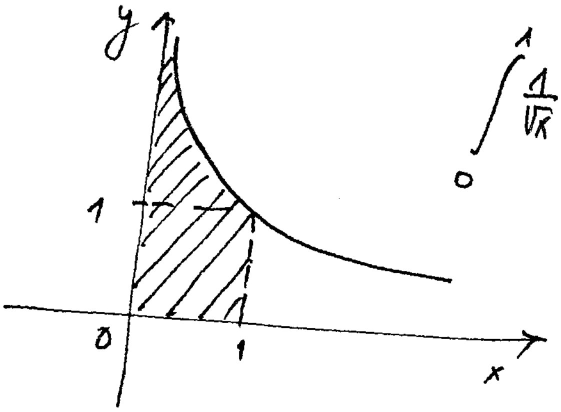
$$=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{x}+1\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=\boxed{1}$$



U př. 2 se graf funkce $y=\frac{1}{x^2}$ blíží „rychleji" k ose x než graf v př. 1.

Příklad 3: Určete nevlastní integrál funkce $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ v mezích od 0 do 1.

Vlivem dolní meze $x=0$, kde není funkce definována, jde o nevlastní integrál, hodnota x se blíží k nule zprava ... $x \to 0+$ (viz obrázek).

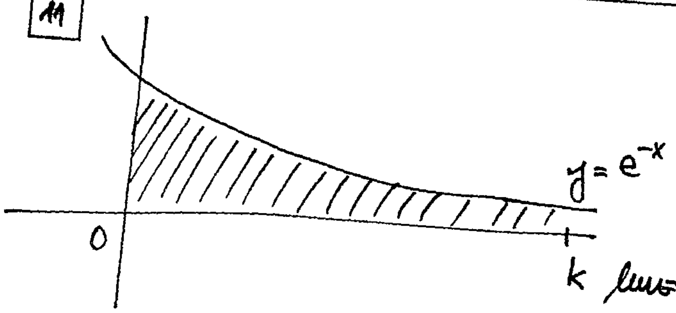


$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_x^1 = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_x^1 = \left[\frac{2}{1}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_x^1 = \left[2\sqrt{x}\right]_x^1 =$$

$$= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{x} = 2 - 2\sqrt{x} = 2 - 2\sqrt{0} = 2 - 0 \boxed{= 2}$$

11



$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-x}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^k = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty =$$

$$= -e^{-\infty} - (-e^0) = \underbrace{-e^{-\infty}}_{=0} + 1 = \boxed{1}$$

Lze vyzkoušet pro různé k

PŘIPOJUJI DALŠÍ DOPLŇKOVÉ PŘÍKLADY - ROZLIČNÉHO TYPU.

Příklad 4: na substituci

$$\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx = \qquad \text{Sub. } t = \ln x$$

$dt = \frac{1}{x}\,dx$ ... provedeme formálně jako derivaci t podle proměnné x.

$$= \int \underbrace{(\ln x)^6}_{t^6} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{dt} = \int t^6\,dt = \frac{t^7}{7} = \frac{1}{7}t^7 + c = \boxed{\frac{1}{7}(\ln x)^7 + c}$$

Příklad 5: na substituci

$$\int 12x \cdot \underbrace{(x^2+9)^{10}}_{t^{10}}\,\underbrace{dx}_{\frac{dt}{2x}} = \qquad \text{Sub. } t = t^2+9$$

$dt = 2x\,dx$, protože v integrovaném výrazu potřebuji dx, tak ho vypočítám: $dx = \frac{dt}{2x}$

$$= \int 12x \cdot t^{10} \cdot \frac{dt}{2x} =$$

$$= \int \frac{12x}{2x} \cdot t^{10}\,dt = \int 6\,t^{10}\,dt = 6\int t^{10}\,dt = 6 \cdot \frac{t^{11}}{11} = \frac{6}{11}t^{11} =$$

$$= \boxed{\frac{6}{11}\cdot(x^2+9) + c}$$

Příklad 6: pomocí základních vzorců

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + 5x^4\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int 5x^4\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-3}\,dx + 5\cdot\int x^4\,dx = \ln x + \frac{x^{-2}}{-2} + 5\cdot\frac{x^5}{5} =$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\cdot x^{-2} + x^5 = \ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + x^5 + C = \boxed{\ln x - \frac{1}{2x^2} + x^5 + C}$$

Příklad 7: pomocí úpravy integrandu a základ. vzorců

$$\int (x^2+3)^2\,dx = \int (x^4+6x^2+9)\,dx = \frac{x^5}{5} + 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9x = \boxed{\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x + C}$$

Příklad 8 metodou per partes (po částech) $\int uv' = uv - \int u'v$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x = x \cdot e^x - \int e^x = x \cdot e^x - e^x = \boxed{e^x(x-1)}$$

$u = x \quad v' = e^x$

$u' = 1 \quad v = e^x$

Příklad 9: per partes

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x = x \cdot \sin x - (-\cos x) = \boxed{x \cdot \sin x + \cos x}$$

$u = x \quad v' = \cos x$

$u' = 1 \quad v = \sin x$

Příklad 10 určit int. metodou per partes

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx = \quad \text{pomocí} \quad \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

$u' = x^3 \quad v = \ln x$

$u = \frac{x^4}{4} \quad v' = \frac{1}{x}$

$$\left[\frac{x^4}{4} \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{4} \, dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} \cdot \ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4}\right]_1^e = \left[\frac{x^4}{4} \cdot \ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e =$$

$$= \left(\frac{e^4}{4} \cdot \ln e - \frac{e^4}{16}\right) - \left(\frac{1^4}{4} \cdot \ln 1 - \frac{1^4}{16}\right) = \frac{e^4}{4} \cdot 1 - \frac{e^4}{16} -$$

$$- \left(\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{16}\right) = \frac{4e^4 - e^4}{16} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{3e^4 + 1}{16} \quad (\doteq 10{,}3)}$$

NÁVRAT K ÚLOHÁM Z PŘEDNÁŠKY Č. 8

12 $\int \cot g\, t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt =$ subst. $x = \sin t$, $dx = \cos t \, dt$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{x} \cdot \underbrace{\cos t \, dt}_{dx} = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x = \boxed{\ln(\sin t)}$$

$\boxed{13}$ $\displaystyle\int \frac{1+\ln^2 t}{t}\,dt = \dots$ Sub. $x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

$dx = \frac{dt}{t}$

$$= \int (\underbrace{1+\ln^2 t}_{x^2}) \cdot \underbrace{\frac{dt}{t}}_{dx} =$$

$$= \int (1+x^2)\,dx = x + \frac{x^3}{3} = \ln t + \frac{\ln^3 t}{3} = \boxed{\ln t + \frac{1}{3}\ln^3 t}$$

$\boxed{14}$ $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int \underbrace{\cos\sqrt{t}}_{\cos x} \cdot \underbrace{\frac{dt}{\sqrt{t}}}_{2dx} =$

Sub. $x = \sqrt{t}$ $(t^{\frac{1}{2}})$

$dx = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1}\,dt$

$dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$2dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$2dx = \frac{dt}{\sqrt{t}}$ a to máme ve výrazu $\int$

$$= \int \cos x \cdot 2dx = 2\int \cos x\,dx =$$

$$= 2\sin x = \boxed{2\sin\sqrt{t}}$$

$\boxed{15}$ $\displaystyle\int (\sin t^2)\cdot t\,dt = \int \sin x \cdot \frac{dx}{2} = \frac{1}{2}\int \sin x\,dx =$

Sub. $x = t^2$

$dx = \underbrace{2t\,dt}_{\text{potřebuji jen } t\,dt}$

$t\,dt = \frac{dx}{2}$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x) = -\frac{1}{2}\cos x =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}\cos t^2}$$

$\boxed{16}$ $\displaystyle\int_1^e e^{-\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt =$ další strana

Sub. $x = -\frac{1}{t}$ $(= -1\cdot t^{-1} = -t^{-1})$

$dx = (-t^{-1})'\cdot dt$ podle $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

$dx = (-1)\cdot(-t)^{-1-1}\,dt$

$dx = -1(-t)^{-2}\,dt$ sudý exponent, výsledek je +

$dx = -1\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$

9 $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

Nové meze při substituci získám z $x = -\frac{1}{t}$, kam za t dosazuji postupně staré meze: $t=1$, $t=e$

$x = -\frac{1}{1}$ $\boxed{x = -\frac{1}{e}}$

$\boxed{x = -1}$ – nové meze

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{e}} e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^{-\frac{1}{e}} = \boxed{e^{-\frac{1}{e}} - e^{-1}}$$

---

17 $\displaystyle\int_0^{-\infty} e^{-t^2} \cdot t\, dt = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \int_0^{t} e^{-t^2} t\, dt}_{\text{Při postupu ale jako předchozí}}$

Sub. $x = -t^2$

$dx = -2t\, dt$

Potřebuji však hodnotu upravit $t\,dt$ $\Rightarrow$

$t\,dt = -\frac{dx}{2}$

$$\int_0^{-\infty} e^x \cdot \left(-\frac{dx}{2}\right) = \int_0^{-\infty} -\frac{1}{2} e^x \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^x dx = -\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^{-\infty} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty} - e^0\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}\cdot(-1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

---

18 $\displaystyle\int_0^{-\infty} t^3 \cdot e^{-t^2} dt = \int_0^{-\infty} e^{-t^2} \cdot t^2 \cdot \boxed{t\, dt} =$

Sub. $x = -t^2$ (tak $t^2 = -x$)

$dx = -2t\, dt$

$\boxed{t\,dt} = -\frac{dx}{2}$

$$= \int_0^{-\infty} e^x \cdot (-x) \cdot \left(-\frac{dx}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{-\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) e^x \cdot (-x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^x \cdot (-x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^x x\, dx \quad \text{per partes}$$

$u' = e^x \quad v = x$

$u = e^x \quad v' = 1$

$$= \left[e^x \cdot x\right]_0^{-\infty} - \int_0^{-\infty} e^x \cdot 1 = \left[e^x \cdot x\right]_0^{-\infty} - \left[e^x\right]_0^{-\infty}$$

$$= \underbrace{e^{-\infty} \cdot (-\infty)}_{0} - \underbrace{e^0 \cdot 0}_{0} - \left[e^{-\infty} - e^0\right] = -(0-1) = \boxed{1}$$
