$n!$ faktoriál, kombinační čísla a rovnice

a) $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad n \in N$

Př. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{24}}$

b) kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ čteme: n nad k

$n > k$

$n, k \in N$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

$$\boxed{0! = 1}$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1$

$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} \qquad \binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{n} = 1$

Př. $\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = \underline{\underline{84}}$

využití:

a) binomická věta

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Př. $(a+b)^3 = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} a^3 b^0 + \underbrace{\binom{3}{1}}_{=3} a^2 b + \underbrace{\binom{3}{2}}_{=3} a b^2 + \underbrace{\binom{3}{3}}_{=1} a^0 b^3 =$

$n = 3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\Rightarrow$ při odvození vzorců pro $\sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots$

b) Pascalův $\triangle$

1

1 1

1 2 1 $\longrightarrow$ $n=2 \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

1 3 3 1 $\to$ $n=3 \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

1 4 6 4 1 $\to$ $n=4 \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = (a+b)^4$

$\vdots$

Sb.:

57/5.1 1) $\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{4-1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$ //

$3!=3.2=6$

$4!=4.3.2=24$

57/5.2 vypočtěte

3) $\frac{(n+1)!}{n}=\frac{(n+1)\cdot \cancel{n}\cdot \overbrace{(n-1)\ldots\ldots}^{(n-1)!}}{\cancel{n}}=(n+1)\cdot(n-1)!$ $\quad n!=n(n-1)(n-2)\ldots$

61/5.12 Řešte rovnice

2) $\binom{x}{2}+\binom{x+3}{1}=4$

nahradit komb. čísla výrazy s faktoriály

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$\frac{x!}{(x-2)!\,2!}+\frac{(x+3)!}{(x+2)!\,1!}=4$

$\frac{x\cdot(x-1)\cancel{(x-2)(x-3)\ldots}}{\cancel{(x-2)(x-3)\ldots}\cdot 2}+\frac{(x+3)\cancel{(x+2)(x+1)x\ldots}}{\cancel{(x+2)(x+1)\ldots}\cdot 1}=4$

$\frac{x(x-1)}{2}+x+3=4 \quad /\cdot 2$

$x^2-x+2x+6=8$

$x^2+x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ ③ $\quad \begin{cases} 1 \; \times \\ \cancel{-2} \notin N \end{cases}$

$\cancel{\binom{1}{2}}$ $\quad K=\emptyset$

$\binom{x}{2}+\binom{x+3}{1}=4$

$\binom{n}{k}: n\geq k$

3) $\binom{\overset{=n}{x-1}}{\underset{=k}{x-2}}+\binom{x-2}{x-4}=4$

$n-k=x-1-(x-2)=1$

$n-k=x-2-(x-4)=2$

$\frac{(x-1)!}{1!\,(x-2)!}+\frac{(x-2)!}{2!\,(x-4)!}=4$

$\frac{(x-1)\cancel{(x-2)(x-3)\ldots}}{1\cdot\cancel{(x-2)(x-3)\ldots}}+\frac{(x-2)(x-3)\cancel{(x-4)\ldots}}{2\cdot\cancel{(x-4)(x-5)\ldots}}=4$

$x-1+\frac{(x-2)(x-3)}{2}=4$

$2x-2+x^2-5x+6=8$

$x^2-3x-4=0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$ ⑤ $\quad \begin{cases} 4 \\ -1 \; \times \end{cases}$

$\binom{4-1}{4-2}=\binom{3}{2}$ ✓

$\binom{4-2}{4-4}=\binom{2}{0}$ ✓

$K=\{4\}$