Měření modulů pružnosti *G* a *E* z periody kmitů pružiny

Online: <http://www.sclpx.eu/lab2R.php?exp=2>

V tomto experimentu vycházíme z pojetí klasického pokusu s pružinovým oscilátorem. Z periody kmitů se obvykle určuje tuhost pružiny. Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou přesahuje obvyklý rámec středoškolského učiva a patří spíše do laboratorního praktika na vysoké škole. Na gymnáziu lze úlohu realizovat v rámci semináře, kde lze se žáky probrat souvislost mezi *Youngovým modulem* *E*, který znají z *Hookova zákona* jako modul pružnosti v tahu (tlaku), a modulem pružnosti ve smyku *G*.

Používáme-li při experimentu pružinu, jejíž hmotnost je nezanedbatelná vůči hmotnosti závaží, musíme tuto hmotnost zahrnout do výpočtu periody, viz např. [82].

**Úvod**

Jak plyne z klasické teorie pružnosti a zobecněného *Hookova zákona*, viz např. [5], [20], tuhost spirálové pružiny závisí na velikosti modulu pružnosti ve smyku *G*, který je jako základní elastická konstanta $μ$ pro homogenní izotropní těleso také znám jako jeden z *Lamého konstant*. Pro výpočet tuhosti pružiny platí tedy následující vztah (2.2.1):

$$k=\frac{G d^{4}}{8 n D^{3}}, (2.2.1)$$

kde *d* je průměr drátu, ze kterého je pružina vyrobena, *n* je počet závitů pružiny a *D* je střední průměr spirály pružiny, jak ukazuje obrázek 2.2.1.



Obr. 2.2.1 Rozbor pružiny – Měření modulu pružnosti ve smyku a Youngova modulu

Pro frekvenci kmitů pružinového oscilátoru pak platí obecný vztah (2.2.2):

$$f=\frac{1}{2π}\sqrt{\frac{k}{m+\frac{m\_{p}}{3}}}, (2.2.2)$$

kde *k* je tuhost pružiny, *m* je celková hmotnost závaží zavěšeného na pružinu a *m*p je hmotnost pružiny, viz [82].

 Dosadíme-li ze vztahu (2.2.2) do vztahu (2.2.1) za tuhost pružiny *k*, získáme výsledný vztah (2.2.3) pro modul pružnosti ve smyku *G* v závislosti na frekvenci kmitů pružiny *f:*

$$G=\frac{32 π^{2}n D^{3}\left(m+\frac{m\_{p}}{3}\right)f^{2}}{d^{4}}=\frac{32 π^{2}n D^{3}\left(m+\frac{m\_{p}}{3}\right)}{d^{4} T^{2}} (2.2.3)$$

Na závěr uveďme ještě i vztah (2.2.4) mezi *Youngovým modulem* *E* a modulem pružnosti ve smyku *G*:

$$G=\frac{E}{2\left(1+σ\right)}, (2.2.4)$$

kde $σ$ je bezrozměrná, tzv. *Poissonova konstanta* (pozor, nezaměňovat se stejně pojmenovanou konstantou užívanou u adiabatického děje v teorii plynů), kterou lze určit z *Lamého koeficientů* $λ, μ$ podle vztahu (2.2.5):

$$σ=\frac{λ}{2\left(λ+μ\right)} (2.2.5)$$

Tato konstanta $σ$ představuje hodnotu poměru relativního příčného zkrácení k relativnímu podélnému prodloužení a je vždy kladná [5]. Tabulkové hodnoty pro ocel a železo, které jsou nejčastějším materiálem pro výrobu pružin, udává následující tabulka 2.2.1.

**Tabulka 2.2.1** Tabulkové hodnoty $σ, E, G$ pro ocel a železo

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| materiál | $$σ$$ | *G* (GPa) | *E*(GPa) |
| ocel  | 0,30  | 85 – 88  | 220 – 240  |
| železo | 0,28  | 82 | 210  |

**Pomůcky:** monogate, pružina, závaží, izolepa, špejle, digitální váhy, stativový materiál

**Postup práce**

Experimentální uspořádání je na obrázku 2.2.2. Nejprve zvážíme na digitálních váhách pružinu a určíme její hmotnost *m*p. Posuvným měřidlem změříme vnější a vnitřní průměr spirály *D*1, resp. *D*2. Střední průměr *D* vypočítáme jako aritmetický průměr hodnot *D*1 a *D*2. Dále zjistíme ještě hmotnost závaží, které budeme věšet na pružinu, a počet závitů pružiny.

Na závaží připevníme pomocí izolepy špejli a monogate sestavíme v horizontální poloze tak, aby v rovnovážné poloze oscilátoru (oscilátor je v klidu) mířil laserový paprsek na špejli.



Obr. 2.2.2 Uspořádání experimentu – Měření modulu pružnosti

Oscilátor rozkmitáme a ve FAE provedeme záznam signálu, který můžeme vidět na obrázku 2.2.3. Modře je zvýrazněn výběr jedné periody mezi prvním a třetím píkem signálu.

 Experimentálně určenou hodnotu periody *T* spolu s ostatními hodnotami veličin dosadíme do vztahu (2.2.3) a provedeme výpočet modulu pružnosti ve smyku *G* a *Youngova modulu* *E*.

 Experiment opakujeme několikrát (minimálně pětkrát) pro různé hodnoty hmotnosti závaží *m*, přičemž před začátkem nového měření s novým závažím znovu nastavíme polohu monogatu tak, aby laser mířil na špejli.



Obr. 2.2.3 Oscilogram experimentu – Měření modulu pružnosti – výběr jedné periody

Absolutní nejistotu v určení modulu pružnosti ve smyku *G* vypočítáme pomocí analytických nástrojů MS Excel z následujícího vztahu (2.2.6)

$$∆G=\overbar{G}\left(\frac{3∆D}{\overbar{D}}+\frac{∆m}{\overbar{m}}+\frac{∆m\_{p}}{\overbar{m}\_{p}}+\frac{4∆d}{\overbar{d}}+\frac{2∆f}{\overbar{f}}\right), (2.2.6)$$

který lze za zjednodušujícího předpokladu přesného určení průměrů *d* a *D*, hmotnosti závaží a hmotnosti pružiny zjednodušit na vztah (2.1.3):

$$∆G=\overbar{G}\left(\frac{2∆T}{T}\right)=∆E (2.2.7)$$

Protože podle vztahu (2.2.4) závisí výpočet *Youngova modulu E* na vynásobení modulu *G* určitou konstantou, je nejistota měření obou modulů stejná, tj. $∆G=∆E$.

Námi naměřené hodnoty udává následující tabulka 2.2.2. Na závěr vytvoříme graf závislosti modulu pružnosti ve smyku nebo tahu na periodě kmitů pružiny, který doplníme o regresní analýzu (Přidat spojnici trendu). Graf vytvořený na základě tabulky 2.2.2 je na obrázku 2.2.4.

**Tabulka 2.2.2** Měření modulu pružnosti ve smyku a Youngova modulu

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *m* (kg) | $T\_{0}$ (s) | $G$ (GPa) | $E$ (GPa) |
| 0,445 | 0,860 | 101 | 262 |
| 0,445 | 0,856 | 102 | 264 |
| 0,445 | 0,848 | 104 | 269 |
| 0,445 | 0,870 | 98 | 256 |
| 0,445 | 0,864 | 100 | 259 |
| 0,545 | 1,013 | 73 | 189 |
| 0,545 | 1,036 | 69 | 180 |
| 0,545 | 1,018 | 72 | 187 |
| 0,545 | 1,020 |  72 | 186 |
| 0,545 | 1,026 | 71 | 184 |

Obr. 2.2.3 Graf závislosti modulu pružnosti ve smyku na periodě kmitů pružiny – Měření modulu pružnosti

**Závěr**

Naměřené hodnoty uvedené v tabulce 2.2.2 se celkem dobře shodují s tabulkovými hodnotami v tabulce 2.2.1. U oceli záleží na typu a jejím složení, které však většinou neznáme. V tomto případě se může jednat pouze o orientační měření v rámci nějakého intervalu hodnot.

 Průměrná hodnota modulu pružnosti ve smyku oceli určená z hodnot v tabulce 2.2.2 má velikost $G=\left(86\pm 1\right)$ GPa. Relativní nejistota měření je $δG=0,011628≐1$ %, což v dobré shodě s uspokojivým měřením realizovaným ve školní laboratoři. Hodnota je ve výborném souladu s tabulkovou hodnotou v intervalu (85 – 88) GPa.

 Regresní funkce v grafu na obrázku 2.2.3 tentokrát není lineární, ale mocninná, což odpovídá odvozené závislosti (2.2.3), ve které platí $G\~\frac{1}{T^{2}}$.

**Otázky na závěr**

1. Ze vztahu (2.2.3) a (2.2.4) odvoďte závislost Youngova modulu *E* na periodě kmitů *T* a na základě analogie se vztahem (2.2.6) formulujte vztah pro absolutní nejistotu měření $∆E$.

2. Pokuste se odhadnout, jak by se změnily výsledky výpočtů, kdybychom neuvažovali vliv hmotnosti pružiny.